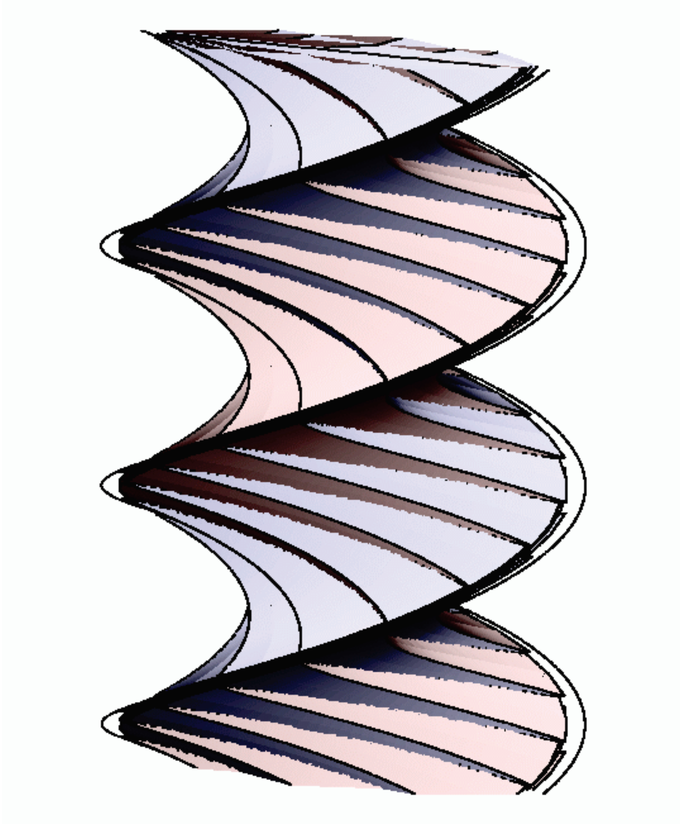
Extensions, cohomologie cyclique et théorie de l'indice

Rudy Rodsphon

Institut Camille Jordan
UMR 5208 du CNRS

Extensions, cohomologie cyclique et théorie de l'indice



Rudy Rodsphon

Thèse de doctorat

Université Claude Bernard Lyon 1

Université Claude Bernard Lyon 1
École doctorale InfoMath, ED 512
Spécialité : Mathématiques
N. d'ordre 219 - 2014

Extensions, cohomologie cyclique et théorie de l'indice

Thèse de doctorat

Soutenue publiquement le 3 novembre 2014 par

Rudy Rodsphon

devant le Jury composé de :

M. Moulay Benameur	Université Montpellier 2	
M. Thierry Fack	Université Lyon 1	Co-directeur
M. Nigel Higson	Penn State University	Rapporteur
M. Johannes Kellendonk	Université Lyon 1	
M. Victor Nistor	Université de Metz	Rapporteur
M. Denis Perrot	Université Lyon 1	Directeur
M. Georges Skandalis	Université Paris 7	Président du Jury

À mon grand-père

Remerciements

Tout naturellement, je voudrais tout d'abord remercier mon directeur de thèse Denis Perrot. Il m'a offert le meilleur encadrement que j'aurais pu espérer, se rendant toujours disponible pour répondre à mes questions avec une clarté et une précision que j'ai rarement pu voir ailleurs, pour partager ses points de vue et donner des conseils avisés. Il a aussi su me laisser choisir certaines directions pour la thèse et je lui en suis très reconnaissant. Humainement, Denis est devenu pour moi un ami avec lequel j'ai toujours plaisir à échanger, et je crois que nous partageons certaines choses en commun. Je dois également beaucoup à son soutien sans faille durant la durée de la thèse. J'espère que nous continuerons à travailler ensemble à l'avenir, et surtout à rester en contact.

Un grand merci à Thierry Fack, qui a accepté de co-encadrer cette thèse. Malgré son emploi du temps chargé, il a tout de même réussi à me réserver quelques moments pour partager ses grandes connaissances (mathématiques, mais pas que) au travers de longues discussions dans son bureau et à Bonn, ou d'autres plus furtives au détour d'un couloir. J'aimerais aussi le remercier de sa relecture méticuleuse de mon premier article, qui a beaucoup contribué à en améliorer le contenu.

I am really honored that Nigel Higson and Victor Nistor accepted the task of refereeing my thesis, due to the numerous contributions they made in Noncommutative Geometry and Index Theory. Both have had a lot of influence on the present thesis. I learned many things in the field through Nigel's papers, in particular those on the residue index theorem of Connes and Moscovici, which were definitely an important point of departure in my work. Many aspects developed in the thesis were initiated by Victor, so I am really glad that he accepts to give his opinion on this work.

Merci à Moulay Benameur, Georges Skandalis et Johannes Kellendonk d'avoir accepté de faire partie du jury. Moulay m'a donné l'opportunité de présenter mes travaux à Montpellier et m'a suggéré quelques questions qui ont permis d'optimiser certains résultats, ainsi que des pistes de recherche intéressantes pour la suite. Malgré tout ce qu'il a pu apporter à la communauté mathématique et celle des géomètres non commutatifs en particulier, Georges s'est toujours rendu accessible et bienveillant, notamment envers les jeunes comme moi, et toujours prêt à discuter de mathématiques. Je voudrais sincèrement leur témoigner ma gratitude pour tout cela.

Au travers des différents séminaires et groupes de travail organisés à Lyon 1, en plus de diverses discussions, Johannes Kellendonk a aussi participé à ma progression scientifique et je lui en suis reconnaissant.

I would like also to thank Guoliang Yu, who encouraged me and raised interesting questions and perspectives about my work. I also would like to thank him for his great lectures.

J'aimerais maintenant remercier les membres de la communauté des géomètres non commutatifs que j'ai eu la chance de rencontrer, pour leur bienveillance envers les jeunes. Je crois qu'il est important de se sentir à l'aise au sein d'une communauté afin de pouvoir s'épanouir et apprendre, et cela a été entièrement le cas pour moi. J'espère sincèrement que tout doctorant entrant dans le milieu de la recherche puisse avoir cette chance. Je tiens à remercier plus particulièrement chez les jeunes Jonathan Crespo, Amaury Freslon, Olivier Gabriel, Seunghun Hun, François Lemeux, Manon Thibaut, Jianchao Wu et Vito Zenobi, et chez les plus expérimentés Paulo Carrillo, Victor Gayral, Michel Hilsum, Yuri Kordyukov, Jean-Marie Lescure, Hervé Oyono, Paolo Piazza, Raphaël Ponge, Yi Jun Yao (aussi pour l'organisation de cette superbe école d'été à Shanghai), Thomas Schick, Erik Van Erp, Stéphane Vassout, Bob Yuncken pour tous les moments partagés, discussions échangées mathématiques ou non, les invitations à divers endroits ...

Pour s'épanouir, l'environnement où l'on travaille est important également. S'il est vrai que l'Université Lyon 1 est l'endroit où j'ai grandi en tant qu'étudiant, passer de l'autre côté et comprendre l'envers du décor n'est pas si évident. Pour cela, j'aimerais remercier les membres de l'ICJ que j'ai pu côtoyer durant ce rite de passage. Tout d'abord, les membres du conseil du laboratoire, où j'ai beaucoup appris sur le fonctionnement de la recherche, et plus particulièrement Elisabeth Mironescu qui malgré son emploi du temps surchargé, a toujours pris le temps de la discussion pour donner conseils, encouragements et bien d'autres. J'ai aussi eu des discussions intéressantes avec divers membres du laboratoire, en vrac : Vincent Borrelli sur la vision de ce qu'est un mathématicien et la basse électrique, Alessandra Frabetti pour ... tellement de choses diverses, Laurent Pujo et Sorin Ciuperca pour nos échanges sur l'enseignement pendant le TD d'EDO, Lionel Nguyen rencontré dans un avion (et non pas au labo ...), Fabien Vignes et Régis Goiffon qui n'arrêtent pas de vouloir m'embrigader pour MathàLyon (plus sérieusement, votre travail est remarquable et vraiment important pour la communauté scientifique), Léon Tine et Evrad Ngom pour nos échanges sur les cultures africaines et asiatiques, Abdel Agouzal pour nos diverses discussions ... Tous ces échanges, même n'étant pas nécessairement reliés directement aux mathématiques, ont contribué à mon épanouissement en tant que mathématicien et je vous en remercie. Sur un aspect plus pratique, merci à Lorenzo Brandolese pour le travail qu'il a fourni sur les couvertures de la thèse.

Parmi ceux qui sont partis, merci à Pierre Crépel, pour toutes ces discussions sur tout que l'on peut avoir, avec une grande liberté de penser. Vieux renard, ta présence manque en ces lieux ! Mention spéciale également à Thomas Rey qui m'a également tant appris pendant la période où j'étais encore un nouveau, et spécialement sur l'aspect paperasse qui est loin d'être la partie facile à digérer !

Merci à tout le personnel administratif, qui font un travail remarquable nous permettant de travailler en toute sérénité. Plus spécialement, merci à Laura Arrault, Aurélie Reymond, Maria Konieczny et Arnaud Lieury à l'ICJ, et Carine Sevestre au Labex, avec qui j'ai eu des contacts de façon plus directe, et dont l'aide aura été précieuse durant ces années de thèse. Une mention spéciale à Monique Gaffier, qui arrivait à faire tellement de choses en même temps et si vite ...

Merci à tous ceux que j'ai pu rencontrer à la bibliothèque de mathématiques depuis le début de ma scolarité, qui sont maintenant pour la plupart devenus des amis. Plus spécialement, Claire, que j'ai connue dès mon arrivée ici, Agnès et Anne-Sophie, arrivées un peu plus tard et enfin Isabelle, c'est grâce à vous si je me sens si bien dans cette bibliothèque. Par contre, je vous promets de faire des efforts pour rendre les livres à temps ... Maintenant c'est écrit ...

Toujours à la BU, dédicace à Abdel, Ludwig et Basile, les compères de toujours (pas besoin d'en dire plus non ? EXCELLENT !), à Nathan qui deviendra un formidable mathématicien, à Chaouki, qui va finir par se faire mal au dos avec ces kilos de bouquins dans son sac et à Fériel, qui n'aime pas les chinois ! Merci aussi à Céline Hess, pour toute l'aide fournie sur beamer !

Je voudrais remercier les jeunes chercheurs de l'institut, mes pairs avec qui on se sent du coup plus à l'aise. Parmi les "vieux", nous étions dans certains cours ensemble : je pense à Jean-Baptiste, Blanche, Elodie. Il y a aussi les nouveaux venus avec qui j'aime beaucoup échanger : Antoine qui croule sous le travail (à la japonaise), Benoît qui est toujours pépère (les compactifications magnifiques aident ?), Coline qui l'est un peu trop (l'hypothèse de Riemann va pas tomber toute seule hein ?), Ivan qui boit trop de café (remarque, l'analyse fonctionnelle demande une certaine forme de surexcitation !), Maxime qui traîne toujours en bas (ah la 1ère année ... mais je suis mal placé pour dire ça).

Vient ensuite le tour de mes chers co-bureaux (et anciens co-bureaux) de la 109E : il y a tant à dire ... (en bien ? En mal ? A vous de voir mwahahahah) ... Plus sérieusement, ce bureau est l'un des meilleurs souvenirs de cette expérience de thèse, tant scientifiquement (belle diversité de domaines représentée !) qu'humainement.

Bérénice, j'aime bien nos discussions très riches sur plein de sujets différents, surtout que tu es toujours ouverte et à l'écoute des opinions des autres, sans chercher à imposer ton point de vue. C'est une grande qualité ! Et puis, tu es la seule autre personne du bureau que moi à être mariée ! (cf. Vincent)

Claire-Soizic, qui était la seule du bureau avec qui était entièrement avec moi pendant l'année du M2, où on a bien déliré ! Ne me prends pas pour quelqu'un qui ne parle que de maths ! Quoique ... C'est dommage que tu sois partie plus tôt, mais parfois certaines choses passent avant tout.

Nadja, comme tu es arrivée récemment dans le bureau, on se connaît moins, mais une chose que je vois chez toi depuis que je te connais, c'est que tes yeux brillent quand tu parles de maths ! Du coup, c'est agréable de discuter avec toi. Par contre, j'avoue que deux logiciens dans le bureau, ça commence à faire ...

Simon, il faut vraiment que t'arrêtes la théorie des nombres ... Tes cheveux deviennent de plus en plus blancs, les tableaux deviennent dégueulasses à un point qu'on ne peut même plus écrire dessus même après avoir effacé à l'éponge ... Non, plus sérieusement, tu as une intuition impressionnante en analyse, et j'admire vraiment cette capacité à ne reculer devant rien, en particulier devant les calculs.

Sylvain, nouveau venu aussi et catalogué physicien qui bascule vers les maths. C'est pas jojo comme étiquette ! Plus sérieusement, on se connaît depuis le M2 et c'est toujours agréable d'échanger avec toi sur tout et rien, et d'autres ... (tu vois ce que je veux dire ? Mwahahah !). Mais où sont passées tes feuilles de calcul A2 ?

Saïd, qui a quitté le bureau depuis peu. Pour tout t'avouer, ta présence fait un certain vide ... En fait, si mes souvenirs ne me trahissent pas, on s'est rencontrés bien avant le début de ma thèse, à des périodes où je trainais encore vers la bibliothèque vers Braconnier. En tout cas, je te dois un dîner à la maison, je n'oublie pas.

Tomás, j'aime beaucoup cette vue profonde des maths que tu as, et tu me donnes très sérieusement envie de connaître plus de choses en logique. Il y a en tout cas des points très similaires à la GNC, et j'espère qu'on pourra partager ça plus en détail un jour (enfin, comme tu rates ma soutenance ...).

Vincent, qui est en fait l'autre marié du bureau ... Mais bon comme t'es jamais là ... En tout cas, tout ces débats politiques qu'on a eus étaient bien marrants, on tombe parfois d'accord, souvent moins, mais c'est ça qui est bien, et c'est comme ça qu'on apprend.

Xavier, le travailleur fou qui arrive à 7h de mat et repart à 19h (et encore ...), curieux sur toutes les mathématiques. Il faudrait remonter un autre groupe de travail un ces quatre. Mais en fait je sais pas vu que tu rates ma soutenance aussi ! J'espère assister à la tienne en tout cas.

Il y a aussi trois amis mathématiciens hors de l'ICJ que j'aimerais remercier, Colin et Yohann (qui bizarrement ont des chemins très similaires !), je pense que vous me comprenez si je dis qu'il n'est pas nécessaire d'en dire plus. Et aussi Giulio, qui connaît tant de mathématiques. J'en profite d'ailleurs pour m'excuser de répondre à tes mails avec tant de retard ... Je m'arrête là pour les amis et en reste aux mathématiciens ... Si je continue avec les non-mathématiciens, il y a de quoi doubler le volume de la thèse.

C'est aussi valable pour ma famille, mais elle m'a tant donné que je me dois d'écrire quelques mots. A mes grands-parents, merci d'avoir toujours été là depuis que je suis tout petit et tellement d'autres choses. Pour les jeunes cousins derrière moi, Tristan, Maxime, Lucas, Florent et Arthur, n'ayez surtout pas la pression du grand cousin qui a fait une thèse ... Un diplôme, c'est juste une feuille de papier, donc avant tout, suivez toujours le chemin que vous sentez être le bon, peu importe ce que les autres vous disent. Manon, je ne t'ai pas oubliée, mais tu n'as pas besoin de mes conseils donc fonce !

Merci mes beaux-parents, qui m'avez pour m'avoir accueilli en Chine comme un fils. Ce que j'y ai appris là-bas a complètement bouleversé ma façon de vivre et d'avancer, c'est difficile à dire avec des mots ... Mais c'est aussi quelque chose que j'ai appris de vous, qu'on peut communiquer aussi sans les mots.

Pour mes parents, je vous dois tellement qu'il ne vaut mieux pas que je commence à écrire ... C'est difficile pour un fils d'exprimer ce qu'il ressent pour ses parents ... Pour faire court, pour avoir toujours été là dans les moments importants, de m'avoir soutenu sans faille dans mes choix, pour tout ce que vous m'avez offert, et tant d'autres ... Merci ! Je n'aurais jamais pu arriver jusque-là sans vous ... Je vous embrasse très fort.

A mon petit frère, d'avoir été ton grand frère est certainement ce qui a forgé la personne que je suis devenue maintenant, sans forcément t'en rendre compte. A vouloir devenir un grand frère exemplaire et bienveillant ... Et au final, tu m'as appris beaucoup, et n'as certainement pas besoin de moi comme exemple donc fonce ! Pour le reste, pas besoin d'en dire plus.

Enfin, ma tendre femme, qui me donne tant chaque jour. Nous ne sommes qu'au début d'une belle histoire (deux ans et une semaine de mariage quand même !), et nous avons déjà traversé bien des choses (et beaucoup de kilomètres aussi). Je ne saurais dire où tout cela va nous mener, mais tant que l'on peut vieillir ensemble main dans la main, je sais que tout ira bien.

不知道自己不知道
知道自己不知道
不知道自己知道
知道自己知道

匿名者

Résumé de la thèse

Le théorème de l'indice d'Atiyah et Singer, démontré en 1963, est un résultat qui a permis de relier des thématiques mathématiques variées, allant des équations aux dérivées partielles à la topologie et la géométrie différentielle. Plus précisément, il fait le lien entre la dimension de l'espace des solutions d'une équation aux dérivées partielles elliptique et des invariants topologiques du type (co)homologie, et a des applications importantes, regroupant plusieurs théorèmes majeurs venant de divers domaines (géométrie algébrique, topologie différentielle, analyse fonctionnelle). D'un autre côté, les fonctions zêta associées à des opérateurs pseudodifférentiels sur une variété riemannienne close contiennent dans leurs propriétés analytiques des informations intéressantes. On peut par exemple retrouver dans les résidus le théorème de Weyl sur l'asymptotique du nombre de valeurs propres d'un laplacien, et en particulier le volume de la variété. En se plaçant dans le cadre de la géométrie différentielle non commutative développée par Connes, on peut pousser cette idée plus loin. Plus précisément, on peut obtenir, en combinant des techniques de renormalisation zêta avec la propriété d'excision en cohomologie cyclique, des théorèmes d'indice dans l'esprit de celui d'Atiyah-Singer. L'intérêt de ce point de vue réside dans sa généralisation possible à des situations géométriques plus délicates. La présente thèse établit des résultats dans cette direction.

Le premier chapitre de la thèse comporte des résultats sur des formules locales d'indice générales concernant des "opérateurs elliptiques abstraits". Ces formules viennent d'un certain cocycle cyclique exprimé en termes de résidus de fonctions zêta, et se construit en combinant la propriété d'excision en cohomologie cyclique avec une renormalisation zêta. Ce cocycle est naturellement relié au caractère de Chern-Connes, et est relativement bien adapté aux cas où la fonction zêta a des pôles multiples.

Les chapitres deux et trois établissent des théorèmes d'indice sur un feuilletage pour des opérateurs hypoelliptiques dans le calcul de Heisenberg. On obtient tout d'abord un premier résultat sur $\mathbb{R}^n$ pour cette classe d'opérateurs. L'idée est de rétracter (dans le (B, b)-complexe) le cocycle obtenu au premier chapitre sur un cocycle ne dépendant que du symbole principal. Deux constructions sont proposées : l'une utilise une nouvelle fois l'excision, tandis que l'autre s'appuie sur des méthodes dues à Quillen. On étend ensuite ce résultat, dans un travail en collaboration avec D. Perrot, à la situation plus générale d'un groupe discret agissant par difféomorphismes feuilletés sur un feuilletage. En corollaire, on obtient une solution à un problème posé par Connes et Moscovici, portant sur le calcul du caractère de Chern de la classe fondamentale transverse d'un feuilletage.

Le dernier chapitre comporte des résultats sur les variétés à singularité conique, et fournit un exemple d'application des formules du premier chapitre au cas où la fonction zêta comporte des pôles doubles. La formule d'indice n'est cependant pas locale à cause de la situation singulière considérée. Ce phénomène est analogue à l'apparition de l'invariant êta dans le cas d'opérateurs de type Dirac, mais peut dans notre cas se développer pour d'opérateurs pseudodifférentiels plus généraux.

MOTS-CLÉS. Géométrie non commutative, théorie de l'indice, feuilletages, variétés singulières coniques, K-théorie, (co)homologie cyclique, opérateurs hypoelliptiques

Table des matières

Introduction

1. Quelques points historiques sur la théorie de l'indice

Le point de départ de la théorie de l'indice est le théorème d'Atiyah-Singer, établi en 1963 dans [2]. La force de ce théorème réside dans sa transversalité entre différents domaines mathématiques (analyse, géométrie, topologie), et permet d'établir une égalité du type

$$\text{terme analytique} = \text{terme topologique}.$$

On peut trouver historiquement d'autres théorèmes "d'indice" de ce type, donnant une égalité entre des quantités de natures différentes. Nous allons pour commencer revoir quelques exemples importants d'égalités de ce type, ainsi que leurs conséquences.

Théorème de Gauss-Bonnet (1848). Etant donné une surface riemannienne compacte orientée (M, g), le théorème de Gauss-Bonnet énonce la formule suivante :

$$\chi(M) = \frac{1}{2\pi}\int_M k_g(x)dx,$$

où $\chi(M)$ désigne la caractéristique d'Euler de M, et k_g la courbure de Gauss de (M, g). Le nombre $\chi(M)$ est un *invariant global* de M, alors que k_g est de nature géométrique ; le Theorema Egregium de Gauss implique que k_g ne dépend que de la métrique g, et est ainsi invariante par *isométries locales*. Pourtant, $\chi(M)$ se retrouve en sommant la courbure de Gauss k_g sur tous les points de M. En d'autres termes, on a relié deux quantités de natures différentes par une *formule locale*.

Cette formule met des contraintes intéressantes sur la géométrie d'une surface. Par exemple, soit M le tore de dimension 2. M est de genre 1 et $\chi(M) = 2 - 2 \cdot \text{genre}(M)$, on obtient alors

$$\int_M k_g(x)dx = 0$$

En particulier, on voit qu'on ne peut pas munir le tore d'une métrique ayant une courbure de Gauss strictement positive en tout point. Les combinaisons de théorèmes d'annulation et de théorèmes d'indice permettent de généraliser les raisonnements de ce genre, et sont ainsi particulièrement adaptés à la question de savoir si on peut munir une métrique de courbure scalaire positive sur une variété donnée. On peut noter dans un esprit très proche de Gauss-Bonnet le *théorème de Lichnerowicz* pour les variétés spin closes (voir par exemple [3]). La géométrie non commutative permet de pousser ce raisonnement plus loin, par exemple dans le cadre de la conjecture de Baum-Connes de la théorie de l'indice coarse. On pourra consulter les articles de survol de Schick [44] et Yu [47] pour un aperçu plus détaillé.

Théorème de Fritz Noether (1931). Passons à un exemple tiré de la théorie des opérateurs, où le terme "indice" apparaître explicitement. Soit $S^1 \subset \mathbb{C}$ le cercle unité dans le plan complexe, $L^2(S^1)$ l'espace de Hilbert complexe des fonctions de carré intégrable sur S^1 et

$$H^2(S^1) = \left\{ z \longmapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \, ; \, \sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

l'espace de Hardy sur S^1. Notons P la projection orthogonale de $L^2(S^1)$ sur $H^2(S^1)$. L'espace $C^1(S^1)$ des fonctions dérivables sur le cercle agit par multiplication sur $L^2(S^1)$. Si $u \in C^1(S^1)$ ne s'annule en aucun point de S^1, alors PuP est un opérateur de Fredholm [1] sur $H^2(S^1)$, et le théorème de Fritz Noether calcule son indice :

$$\mathrm{Ind}(PuP) = -\mathrm{Winding}(u, 0) = -\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{S^1} u^{-1} du.$$

On observe que le terme de gauche est purement analytique, alors que celui de droite est entièrement topologique. Cette formule pose la première pierre de la théorie de Brown-Douglas-Fillmore et de la K-homologie [5], qui est fondamentale pour la théorie de l'indice (non commutative). Nous y reviendrons par la suite dans le mémoire. Pour l'instant, nous mentionnons juste que l'application de la théorie de Brown-Douglas-Fillmore permet la classification complète des opérateurs essentiellement normaux obtenus comme perturbation compacte d'un opérateur normal sur un espace de Hilbert (cf. par exemple [23]). Il est intéressant de noter ici l'application de techniques venant de la topologie algébrique à un problème d'analyse fonctionnelle.

Théorème de la signature de Hirzebruch (1956). Nous donnons un dernier exemple, revenant vers la géométrie. Soit M une variété close orientée de dimension $n = 4k$. La *forme d'intersection* de M est la forme bilinéaire sur la cohomologie de de Rham :

$$H^{2k}(M, \mathbb{R}) \times H^{2k}(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\alpha, \beta) \longmapsto \int_M \alpha \wedge \beta$$

Si la forme quadratique est de signature (p, q), alors on définit la *signature de* M comme le nombre $\mathrm{Sign}(M) = p - q$, qui est un invariant d'homotopie. Hirzebruch montre alors que

$$\mathrm{Sign}(M) = \langle [M], L(M) \rangle$$

où $L(M)$ est le polynôme universel de Hirzebruch, qui s'exprime comme un polynôme en les classes de Pontryagin de M. On pourra consulter [25] pour un aperçu instructif. Une application importante de ce théorème concerne les sphères exotiques découvertes pour la première fois par Milnor [30], où il construit pour la première fois des variétés homéomorphes, mais non difféomorphes à la sphère euclidienne S^7 de dimension 7. Donnons l'idée permettant de distinguer ces structures différentiables. Milnor construit une variété à bord N de forme d'intersection (et donc de signature) prescrite, dont le bord $\partial N = \Sigma^7$ est homéomorphe à la sphère S^7. Si ∂N était difféomorphe à S^7, on pourrait alors construire une variété lisse $M = N \sqcup_\Sigma D^8$ en collant N et le disque de dimension 8 le long de Σ^7. Le théorème de la signature donnerait alors

$$\mathrm{Sign}(M) = \int_M \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2)$$

où les $p_i \in H^{4i}(M, \mathbb{Z})$ sont les classes de Pontryagin de M. Sachant ces dernières sont entières, une contradiction vient si l'on fait en sorte que le membre de droite donne un rationnel non entier, ce qui est vérifié pour un certain choix de N.

Equations aux dérivées partielles. Dans les années 60, Gel'fand suggère dans [18] que l'indice de Fredholm d'un opérateur elliptique D doit pouvoir se formuler en des termes purement topologiques du fait sur son invariance par homotopie. Cette idée était de plus renforcée par la *périodicité*

1. Un opérateur $T : H \to H'$, où H et H' sont des espaces de Hilbert, est *de Fredholm* si son noyau $\mathrm{Ker}\, T$ et son conoyau $\mathrm{Coker}\, T = H'/\mathrm{Im}\, T$ sont de dimension finie. Un théorème d'Atkinson dit que ceci équivaut à l'inversibilité de T modulo opérateurs compacts. On définit alors l'*indice* de T comme l'entier

$$\mathrm{Ind}(T) = \dim \mathrm{Ker}(T) - \dim \mathrm{Coker}(T).$$

de Bott, qui exhibe une périodicité dans les groupes d'homotopie des groupes classiques. En effet, si l'on se donne par exemple

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_{x_i}$$

un opérateur différentiel elliptique d'ordre 1 à coefficients matriciels $a_i \in M_N(\mathbb{C})$ constants sur le tore $\mathbb{T}^n$. Alors le symbole

$$\sigma_D(\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$$

de D est inversible pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et définit donc un élément du groupe d'homotopie $\pi_{n-1}(GL_N(\mathbb{C}))$. Or

$$\pi_{n-1}(GL_N(\mathbb{C})) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } n \text{ est pair,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On voit notamment apparaître des éléments de K-théorie topologique, développée par Atiyah et Hirzebruch. On peut alors se demander si la notion d'intégralité donnée par l'indice de Fredholm et celle apparaissant dans la périodicité de Bott sont reliées. La confirmation de ce lien vient du théorème d'Atiyah-Singer. Il énonce qu'étant donné une variété close M, et un opérateur elliptique $D : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$, où E et F sont des fibrés vectoriels complexes sur M, D est un opérateur de Fredholm [2], et son indice analytique est donné par une formule topologique ne dépendant que du symbole principal de D. Plus précisément, $\mathrm{Ind}(D)$ est donné par l'évaluation d'une certaine classe de cohomologie sur la classe fondamentale en homologie $[T^*M] \in H_\bullet(T^*M, \mathbb{C})$ du fibré cotangent de M :

$$\mathrm{Ind}(D) = \langle [T^*M], \mathrm{ch}_0[\sigma_D] \cup \mathrm{Td}(TM \otimes \mathbb{C}) \rangle.$$

Expliquons plus en détail les termes de cette formule. Notant $\pi : T^*M \to M$ la projection canonique, le symbole principal σ_D définit par ellipticité un isomorphisme $\pi^*E \to \pi^*F$ en dehors de la section nulle, donc un élément $[\sigma_D] = [\pi^*E, \pi^*F, \sigma_D]$ du groupe de K-théorie $K^0(T^*M)$ du fibré cotangent. On note de plus $\mathrm{ch}_0 : K^0(T^*M) \to H^{\mathrm{even}}(T^*M, \mathbb{C})$ le caractère de Chern pair et $\mathrm{Td}(TM \otimes \mathbb{C})$ la classe de Todd du fibré tangent complexifié.

On peut également donner une version "impaire" du théorème. Ce cas impose d'avoir $E = F$. Soit S^*M la sphère cotangente de M et notons cette fois $\pi : S^*M \to M$ la projection canonique. Par ellipticité, σ_D est un isomorphisme de π^*E sur S^*M et définit ainsi un élément de K-théorie $[\sigma_D] \in K^1(S^*M) = \pi_0(GL(C^\infty(S^*M))$. Le théorème d'Atiyah-Singer se reformule alors de la manière suivante :

$$\mathrm{Ind}(D) = \langle [S^*M], \mathrm{ch}_1[\sigma_D] \cup \pi^*\mathrm{Td}(TM \otimes \mathbb{C}) \rangle$$

où $\mathrm{ch}_1 : K^1(S^*M) \to H^{\mathrm{odd}}(M, \mathbb{C})$ est le caractère de Chern impair.

Pour illustrer la puissance de ce théorème, tous les exemples de résultats donnés précédemment sont des corollaires de celui d'Atiyah-Singer. On retrouve les théorèmes de Gauss-Bonnet et de la signature en prenant respectivement les opérateurs :

$$D = d + d^* : \Omega^{\mathrm{even}}(M) \longrightarrow \Omega^{\mathrm{odd}}(M),$$

où d est la différentielle de de Rham et d^* son adjoint relativement à la métrique mise sur l'espace des formes différentielles $\Omega^\bullet(M)$, et

$$D = d - {*d*} : S^{\mathrm{even}} \longrightarrow S^{\mathrm{odd}}$$

2. en tant qu'opérateur borné $H^{s+\mathrm{ord}(D)}(M) \to H^s(M)$ entre espaces de Sobolev, pour tout $s \in \mathbb{R}$. L'indice de D ne dépend pas s.

où $*$ est l'étoile de Hodge, qui induit une $\mathbb{Z}_2$-graduation sur $\Omega^\bullet(M) = S^{\text{even}} \oplus S^{\text{odd}}$. On pourra se reporter par exemple à [3], [16] ou [20] pour plus de détails.

Le théorème de Noether est un cas particulier du théorème d'Atiyah-Singer impair avec $M = S^1$: l'opérateur de Toeplitz peut se voir un opérateur pseudodifférentiel elliptique d'ordre 0. On en verra une preuve directe comme application du Chapitre 1.

Cependant, certaines situations géométriques nous amènent à considérer un cadre plus général. Par exemple, comme nous le verrons au long de cette thèse, l'étude de la géométrie transverse d'un feuilletage nécessite de poser le problème pour des opérateurs qui ne sont pas nécessairement elliptiques. Les travaux développés par Atiyah et Singer ne permettent pas d'attaquer directement ces questions, mais la *géométrie non commutative* donne un cadre permettant d'étendre leurs méthodes à des situations plus délicates.

2. Vers la géométrie non commutative

Atiyah a rapidement remarqué que l'indice s'interprète comme le résultat d'un couplage judicieux entre la K-théorie et sa "théorie duale", appelée K-*homologie*. Pour cela, Atiyah décrit cette dernière en utilisant des "opérateurs pseudodifférentiels elliptiques abstraits" [1]. Ces idées seront développées plus tard au moyen d'extensions de C^*-algèbres par Brown-Douglas-Fillmore [5], puis plus généralement avec la théorie de Kasparov [27].

2.1. Modules de Fredholm et K-homologie.

DÉFINITION 1. Un *module de Fredholm impair* sur une $*$-algèbre $\mathcal{A}$ est la donnée :

(i) d'une $*$-représentation de $\mathcal{A}$ comme opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H,

(ii) d'un opérateur autoadjoint $F : H \to H$ tel que pour tout $a \in \mathcal{A}$, $a(F^2 - 1)$ et le commutateur $[F, a]$ soient des opérateurs compacts.

Un *module de Fredholm pair* sur $\mathcal{A}$ consiste en des données similaires, avec H muni d'une $\mathbb{Z}_2$-graduation ε, i.e $\varepsilon^2 = 1$. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont représentés par des opérateurs pairs (i.e ils commutent à ε), et F est impair (i.e ils anticommutent à ε).

REMARQUE 2. On peut toujours se ramener au cas où $F^2 = 1$, modulo la relation d'équivalence définie dans la théorie de Kasparov. Voir par exemple [7], Appendice 2.

L'opérateur F est précisément ce que Atiyah appelle "opérateur pseudodifférentiel abstrait d'ordre 0". En effet, dans le cas concret d'une variété close M, si F un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 et $f \in C^\infty(M)$, alors le commutateur $[F, f]$ est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $\leqslant -1$, et est donc compact.

Soit $(\mathcal{A}, H, F)$ un module de Fredholm impair avec $F^2 = 1$. On considère le projecteur $P = \frac{1+F}{2}$. Si u est inversible dans $\mathcal{A}$, alors l'opérateur

$$PuP : PH \to PH$$

est inversible à opérateur compact près, donc de Fredholm. On a alors un morphisme de groupes entre la K-théorie algébrique et $\mathbb{Z}$:

$$\operatorname{Ind}_F : K_1^{\text{alg}}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad [u] \longmapsto \operatorname{Ind}(PuP : PH \to PH) \tag{1}$$

On peut aussi coupler des modules de Fredholm pairs avec $K_0^{\text{alg}}(\mathcal{A})$. Soit $(\mathcal{A}, H, F)$ un module de Fredholm pair, notons $H = H_+ \oplus H_-$ sa décomposition par rapport à la $\mathbb{Z}_2$-graduation ε. Si e est un idempotent dans $\mathcal{A}$, alors l'opérateur

$$eFe : eH_+ \longrightarrow eH_-$$

est également de Fredholm. On a alors autre morphisme de groupes entre la K-théorie algébrique et $\mathbb{Z}$:

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{Ind}_F : K_0^{\mathrm{alg}}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad [e] \longmapsto \mathrm{Ind}(eFe : eH_+ \to eH_-)$$

EXEMPLE 3.

(i) Le triplet $(C^\infty(S^1), L^2(S^1), F = D|D|^{-1})$, où $D = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}$ et F est prolongé par 1 sur $\mathrm{Ker}(D)$, définit le module de Fredholm associé au théorème de Noether : la projection $P = \frac{1+F}{2}$ est précisément la projection orthogonale de $L^2(S^1)$ sur l'espace de Hardy $H^2(S^1)$.

(ii) Plus généralement, on peut remplacer S^1 par n'importe quelle variété M close et D par un opérateur pseudodifférentiel elliptique.

(iii) Un exemple important de module de Fredholm pair est $(C^\infty(M), L^2(M, S), F = D|D|^{-1})$, où M est une variété spin close, S le fibré des spineurs et D un opérateur de Dirac.

Nous aurons besoin d'une hypothèse supplémentaire sur les modules de Fredholm. Pour $p \geqslant 0$, rappelons que la p-ième classe de Schatten $\ell^p(H)$ sur H est l'idéal bilatère de l'algèbre des opérateurs bornés $\mathcal{B}(H)$ sur H

$$\ell^p(H) = \{T \in \mathcal{B}(H)\,;\, \mathrm{Tr}\,|T|^p < \infty\}.$$

DÉFINITION 4. Un module de Fredholm $(\mathcal{A}, H, F)$ est dit *finiment sommable* s'il existe $p \geqslant 0$ tel que pour tout $a \in \mathcal{A}$, $[F, a] \in \ell^p(H)$.

REMARQUE 5. En particulier, pour tous $a_0, \ldots, a_k \in \mathcal{A}$ avec $n \geqslant p$,

$$[F, a_0] \ldots [F, a_k]$$

est un opérateur à trace sur H.

EXEMPLE 6. Le module de Fredholm sur S^1 de l'exemple ci-dessus est p-sommable pour tout $p > 1$. C'est aussi le cas pour $p = 1$ mais ceci n'est pas générique : un module de Fredholm associé à une variété close M est p-sommable en général pour $p > \dim M$.

Dans [7], Connes observe que si on se donne un module de Fredholm $(\mathcal{A}, H, F)$ impair p-sommable, où $\mathcal{A}$ *n'est pas* une C^*-algèbre, la forme multilinéaire

$$\phi_{2k+1}(a_0, \ldots, a_{2k+1}) = \mathrm{Tr}(a_0[F, a_1] \ldots [F, a_{2k+1}])$$

avec k entier tel que $2k+1 \geqslant p$, $a_0, \ldots, a_{2k+1} \in \mathcal{A}$, définit un cocycle cyclique[3] sur $\mathcal{A}$, et donne la formule d'indice suivante

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{Ind}(PuP : PH \to PH) = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}} \phi_{2k+1}(u^{-1}, u, \ldots, u^{-1}, u)$$

où $P = \frac{1+F}{2}$, et u un inversible dans $\mathcal{A}$.

Pour un module de Fredholm $(\mathcal{A}, H, F)$ pair, on considère le cocycle cyclique suivant

$$\phi_{2k}(a_0, \ldots, a_{2k}) = \mathrm{Tr}(\varepsilon a_0[F, a_1] \ldots [F, a_{2k}])$$

3. Un *cocycle cyclique* sur $\mathcal{A}$ de degré p est une forme $(p+1)$-linéaire ϕ telle que

(i) $\phi(a_0, \ldots, a_p) = (-1)^p \phi(a_p, a_0, \ldots, a_{p-1}), \forall a_0, \ldots, a_p \in \mathcal{A}$

(ii) $b\phi = 0$, où b est le cobord de Hochschild.

L'espace des cocycles cycliques sur $\mathcal{A}$ muni du cobord de Hochschild forme un complexe différentiel, sa cohomologie est la *cohomologie cyclique* $HC^\bullet(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$.

avec k entier tel que $2k \geqslant p$, $a_0, \ldots, a_{2k+1} \in \mathcal{A}$ qui donne alors la formule suivante

$$\operatorname{Ind}(eFe : eH_+ \to eH_-) = (-1)^k \phi_{2k}(e, \ldots, e) \tag{4}$$

où e un idempotent dans $\mathcal{A}$.

Lorsque l'algèbre du module de Fredholm est une C^*-algèbre A, on adopte la terminologie K-*cycle*. En considérant une relation d'équivalence donnée par des homotopies que nous ne décrirons pas ici, l'ensemble des K-cycles impairs sur une C^*-algèbre A forment un groupe $K^1(A)$ appelé *groupe de* K*-homologie impair* de A. On a aussi un *groupe de* K*-homologie pair* $K^0(A)$, donné par les K-cycles pairs. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [23]. Cependant, la cohomologie cyclique n'est pas adaptée aux C^*-algèbres [4]. C'est pourquoi nous travaillons avec des sous-algèbres denses bien choisies dans cette thèse.

Lorsque $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre dense dans une C^*-algèbre A, les couplages (1)-(2) et (3)-(4) peuvent dans certaines situations s'étendre à la K-théorie topologique $K_1^{\mathrm{top}}(A)$ de la C^*-algèbre. Le cas le plus simple est celui où $\mathcal{A}$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe, auquel cas l'injection $\mathcal{A} \subset A$ induit un isomorphisme en K-théorie.

En général, le problème d'étendre ces couplages est difficile, mais important pour les applications. On peut citer par exemple les articles de [9] ou de [10], qui raffinent ce genre d'étude avec la conjecture de Novikov en vue. Une autre application est celle de la classe fondamentale transverse d'un feuilletage et ses corollaires géométriques [6].

2.2. (Co)homologie cyclique et (B, b)-bicomplexe. Le stade de la K-homologie est en un certain sens celui de la topologie non commutative. Connes développe la *géométrie différentielle non commutative* dans [7]. Il construit notamment l'homologie et la cohomologie cycliques périodiques, qui sont respectivement les analogues non commutatifs de la cohomologie et de l'homologie de de Rham.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative sur $\mathbb{C}$ (possiblement sans unité). *L'algèbre des formes différentielles universelles* $(\Omega\mathcal{A}, \mathbf{d})$ sur $\mathcal{A}$ est l'algèbre engendrée par les $a \in \mathcal{A}$ et les symboles $\mathbf{d}a$, $a \in \mathcal{A}$ avec $\mathbf{d}$ linéaire en a, satisfaisant la règle de Leibniz

$$\mathbf{d}(a_0 a_1) = a_0 \cdot \mathbf{d}a_1 + \mathbf{d}a_0 \cdot a_1$$

pour tous $a_0, a_1 \in \mathcal{A}$. On a une filtration

$$\Omega\mathcal{A} = \bigoplus_{k \geqslant 0} \Omega^k \mathcal{A},$$

où $\Omega^k\mathcal{A} = \{a_0 \mathbf{d}a_1 \ldots \mathbf{d}a_k \,;\, a_0, \ldots, a_k \in A\}$. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels naturel

$$\begin{aligned} \Omega^k\mathcal{A} &\xrightarrow{\simeq} \mathcal{A}^+ \otimes \mathcal{A}^{\otimes k} \\ a_0 \mathbf{d}a_1 \ldots \mathbf{d}a_k &\longmapsto a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_k \\ \mathbf{d}a_1 \ldots \mathbf{d}a_k &\longmapsto 1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_k \end{aligned}$$

où A^+ désigne l'unitalisation de $\mathcal{A}$.

La différentielle universelle $\mathbf{d}$ s'étend à $\Omega\mathcal{A}$ par

$$\begin{aligned} &\mathbf{d}(a_0 \mathbf{d}a_1 \ldots \mathbf{d}a_k) = \mathbf{d}a_0 \mathbf{d}a_1 \ldots \mathbf{d}a_k \\ &\mathbf{d}(\mathbf{d}a_1 \ldots \mathbf{d}a_k) = 0 \end{aligned}$$

4. La théorie cyclique est pauvre pour les C^*-algèbres. Par exemple, si A est nucléaire, $HP^1(A) = 0$ et $HP^0(A)$ est l'espace des traces sur A. Il en est de même pour la cohomologie cyclique entière. Une alternative est la *cohomologie cyclique locale* de Puschnigg, mais il est difficile de mener des calculs concrets dans ce cadre.

On définit ensuite deux différentielles sur $\Omega\mathcal{A}$, le *bord de Hochschild* $b : \Omega^{k+1}\mathcal{A} \to \Omega^k\mathcal{A}$ donné par la formule

$$b(a_0\mathbf{d}a_1\ldots\mathbf{d}a_{k+1}) = a_0a_1\mathbf{d}a_2\ldots\mathbf{d}a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i a_0\mathbf{d}a_1\ldots\mathbf{d}(a_ia_{i+1})\ldots\mathbf{d}a_{k+1} \\ + (-1)^{k+1}a_{k+1}a_0\mathbf{d}a_1\ldots\mathbf{d}a_k$$

et la différentielle $B : \Omega^k\mathcal{A} \to \Omega^{k+1}\mathcal{A}$ par

$$B(a_0\mathbf{d}a_1\ldots\mathbf{d}a_k) = \mathbf{d}a_0\mathbf{d}a_1\ldots\mathbf{d}a_k + (-1)^k\mathbf{d}a_n\mathbf{d}a_0\mathbf{d}a_1\ldots\mathbf{d}a_{k-1} \\ + \ldots + (-1)^{kk}\mathbf{d}a_1\ldots\mathbf{d}a_k\mathbf{d}a_0$$

Puisque $b^2 = B^2 = Bb + bB = 0$, on peut définir le (B, b)-*bicomplexe en homologie*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "b"'] & \vdots \arrow[d, "b"'] & \vdots \arrow[d, "b"'] \\
\ldots & \Omega^2\mathcal{A} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"'] & \Omega^1\mathcal{A} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"'] & \Omega^0\mathcal{A} \arrow[l, "B"'] \\
\ldots & \Omega^1\mathcal{A} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"'] & \Omega^0\mathcal{A} \arrow[l, "B"'] & \\
\ldots & \Omega^0\mathcal{A} \arrow[l, "B"'] & &
\end{tikzcd}$$

Notons $\widehat{\Omega}\mathcal{A}$ le produit direct $\prod_{k\geqslant 0}\Omega^k\mathcal{A}$. L'*homologie cyclique periodique* $HP_\bullet(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est l'homologie du complexe total (avec le produit direct), c'est à dire l'homologie du 2-complexe périodique :

$$\widehat{\Omega}^{\mathrm{even}}\mathcal{A} \underset{B+b}{\overset{B+b}{\rightleftarrows}} \widehat{\Omega}^{\mathrm{even}}\mathcal{A}$$

avec

$$\widehat{\Omega}^{\mathrm{even}}\mathcal{A} = \prod_{k\geqslant 0}\Omega^{2k}\mathcal{A}, \quad \widehat{\Omega}^{\mathrm{odd}}\mathcal{A} = \prod_{k\geqslant 0}\Omega^{2k+1}\mathcal{A}$$

La raison pour laquelle on utilise le produit direct est que l'on obtient toujours 0 en homologie avec la somme directe. On a donc seulement deux groupes pair et impair d'homologie cyclique périodique, notés respectivement $HP_0(\mathcal{A})$ et $HP_1(\mathcal{A})$.

Pour $k \geqslant 0$, notons $CC^k(\mathcal{A})$ le dual de $\Omega^k\mathcal{A}$, c'est à dire l'espace des formes $(k+1)$-linéaires sur l'unitalisation $\mathcal{A}^+$ de $\mathcal{A}$, qui vérifient $\phi(a_0, \ldots, a_k) = 0$ si $a_i = 1$ pour un certain $i \geqslant 1$. De façon évidente, on construit le (B, b)-*bicomplexe en cohomologie* comme le dual de celui défini en homologie. Le dual (continu pour la topologie de la filtration) de $\widehat{\Omega}\mathcal{A}$ est la somme directe :

$$CC^\bullet(\mathcal{A}) = \bigoplus_{k\geqslant 0} CC^k(\mathcal{A})$$

La *cohomologie cyclique périodique* $HP^\bullet(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est alors la cohomologie du complexe dual (continu par rapport à la filtration) au 2-complexe périodique donnant l'homologie cyclique, ou de façon équivalente le complexe total du (B, b)-bicomplexe en cohomologie :

$$CC^{\text{even}}(\mathcal{A}) \underset{B+b}{\overset{B+b}{\rightleftarrows}} CC^{\text{odd}}(\mathcal{A})$$

où

$$CC^{\text{even}}(\mathcal{A}) = CC^0(\mathcal{A}) \oplus CC^2(\mathcal{A}) \oplus \dots$$
$$CC^{\text{odd}}(\mathcal{A}) = CC^1(\mathcal{A}) \oplus CC^3(\mathcal{A}) \oplus \dots$$

REMARQUE 7. Parfois, certains auteurs prennent la différentielle $B - b$ au lieu de $B + b$ pour le complexe total.

Un p-cocycle cyclique ϕ_p donne naturellement lieu à un (B, b)-cocycle $(0, \dots, 0, \phi_p, 0, \dots)$, où ϕ_p est placé en $(\frac{p}{2} + 1)$-ième position si p est pair, et en $\frac{p+1}{2}$-ième position si p est impair. Un tel (B, b)-cocycle est dit *homogène*. Si ce n'est pas le cas, on parle de cocycle *inhomogène*.

Nous donnons maintenant un exemple fondamental de calcul de cohomologie cyclique.

EXEMPLE 8. Soit M une variété close et $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ munie de sa topologie de Fréchet. Un théorème de Connes [7] affirme que si l'on se restreint aux (B, b)-cochaînes continues sur $\mathcal{A}$, on retrouve l'homologie de de Rham de M :

$$HP^0_{\text{cont}}(\mathcal{A}) \simeq H_0(M) \oplus H_2(M) \oplus \dots$$
$$HP^1_{\text{cont}}(\mathcal{A}) \simeq H_1(M) \oplus H_3(M) \oplus \dots$$

De façon duale, l'homologie cyclique périodique de $\mathcal{A}$ munie de sa topologie de Fréchet donne également la cohomologie de de Rham. Remarquons qu'il faut pour cela prendre des produits tensoriels projectifs dans la définition de $\Omega\mathcal{A}$.

REMARQUE 9. Si l'on prend le groupe de cohomologie cyclique non périodique d'ordre n, on n'obtient pas, contrairement à ce que l'exemple laisse penser, l'homologie de de Rham de même parité tronquée à l'ordre n. En effet,

$$HC^{2k}_{\text{cont}}(\mathcal{A}) \simeq H_0(M) \oplus \dots \oplus H_{2k-2}(M) \oplus \operatorname{Ker}(d : \Omega_{2k}(M) \to \Omega_{2k-1}(M))$$
$$HC^{2k+1}_{\text{cont}}(\mathcal{A}) \simeq H_1(M) \oplus \dots \oplus H_{2k-1}(M) \oplus \operatorname{Ker}(d : \Omega_{2k+1}(M) \to \Omega_{2k}(M))$$

où $\Omega_\bullet(M)$ désigne les courants de de Rham. Ainsi, la cohomologie cyclique $HC^\bullet$ n'est pas invariante par homotopie. On comprend donc la nécessité de "stabiliser" $HC^\bullet$ pour pallier à cela, ce que fait le (B, b)-complexe.

Comme les exemples précédents le laissent entrevoir, l'homologie cyclique est le réceptacle au *caractère de Chern non commutatif*. On définit respectivement les versions paires et impaires de la façon suivante :

$$\text{(5)} \qquad ch_1 : K_1^{\text{alg}}(\mathcal{A}) \longrightarrow HP_{\text{odd}}(\mathcal{A}), \qquad u \longmapsto \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \, k! \cdot \operatorname{tr}\left(u^{-1}\mathbf{d}u(\mathbf{d}u^{-1}\mathbf{d}u)^k\right)$$

$$\text{(6)} \qquad ch_0 : K_0^{\text{alg}}(\mathcal{A}) \longrightarrow HP_{\text{even}}(\mathcal{A}), \qquad e \longmapsto \operatorname{tr}(e) + \sum_{k \geqslant 1} (-1)^k \frac{(2k)!}{k!} \operatorname{tr}\left((e - \frac{1}{2})(\mathbf{d}e)^{2k}\right)$$

où on note tr la trace d'une matrice.

On peut maintenant revenir aux cocycles cycliques associés à un module de Fredholm construits par Connes, que nous avons vu dans le paragraphe précédent.

THÉORÈME 10. (Connes, [7]) *Soit* $(\mathcal{A}, H, F)$ *un module de Fredholm* p*-sommable impair,* k *un entier tel que* $2k+1 \geqslant p$ *et* $a_0, \ldots, a_{2k+1} \in \mathcal{A}$*. Alors la classe de cohomologie cyclique périodique du cocycle cyclique*

$$\mathrm{ch}_{2k+1}(H, F)(a_0, \ldots, a_{2k+1}) = -\frac{1}{2^{2k+1} \cdot k!} \mathrm{Tr}(a_0[F, a_1] \ldots [F, a_{2k+1}])$$

ne dépend pas de k*. Le* (B, b)*-cocycle* $\mathrm{ch}(H, F)$ *est appelé* caractère de Chern-Connes impair *du module de Fredholm* (A, H, F)*.*

Pour prouver ce théorème, il suffit d'introduire la cochaîne cyclique

$$\gamma_{2k}(a_0, \ldots, a_{2k}) = \frac{1}{2^{2k+1} \cdot k!} \mathrm{Tr}(a_0 F[F, a_1] \ldots [F, a_{2k}]).$$

On vérifie ensuite que $\phi_{2k+1} - \phi_{2k-1} = (B+b)\gamma_{2k}$.

THÉORÈME 11. (Connes, [7]) *Soit* $(\mathcal{A}, H, F)$ *un module de Fredholm* p*-sommable pair,* k *un entier tel que* $2k \geqslant p$ *et* $a_0, \ldots, a_{2k} \in \mathcal{A}$*. Alors la classe de cohomologie cyclique périodique du cocycle cyclique*

$$\mathrm{ch}_{2k}(H, F)(a_0, \ldots, a_{2k}) = \frac{k!}{(2k)!} \mathrm{Tr}(\varepsilon a_0[F, a_1] \ldots [F, a_{2k}])$$

ne dépend pas de k*. Le* (B, b)*-cocycle* $\mathrm{ch}(H, F)$ *est appelé* caractère de Chern-Connes pair *du module de Fredholm* (A, H, F)*.*

La preuve est analogue au cas impair, on introduit cochaîne cyclique

$$\gamma_{2k-1}(a_0, \ldots, a_{2k-1}) = \frac{k!}{(2k)!} \mathrm{Tr}(\varepsilon a_0 F[F, a_1] \ldots [F, a_{2k-1}]).$$

Les formules d'indice paires et impaires (3) et (4) se réinterprètent respectivement de la façon suivante :

$$\mathrm{Ind}(PuP) = \langle \mathrm{ch}_{2k+1}(H, F), \mathrm{ch}_1(u) \rangle, \qquad \mathrm{Ind}(eFe) = \langle \mathrm{ch}_{2k}(H, F), \mathrm{ch}_0(e) \rangle,$$

les restrictions étant sous-entendues. Conceptuellement, on arrive alors à obtenir un théorème d'indice non commutatif comme une égalité entre

(i) Un couplage de la K-théorie avec une théorie duale (selon la nature de l'algèbre, modules de Fredholm ou K-homologie) dans les membres de gauche,

(ii) Un couplage entre cohomologie et homologie cyclique dans les membres de droite, analogue au couplage cohomologie et homologie de de Rham dans le théorème d'Atiyah-Singer.

Néanmoins, les formules définissant le cocycle $\mathrm{ch}(H, F)$ ne sont pas locales : comme elles font intervenir la trace d'opérateurs, elles sont sensibles à des perturbations de F par des opérateurs compacts. Pourtant, on peut montrer que leur classe de cohomologie cyclique périodique ne dépend pas de ces perturbations. A cause de ce caractère non-local, il est ainsi difficile d'utiliser directement $\mathrm{ch}(H, F)$ pour obtenir des formules d'indice concrètes.

2.3. Triplets spectraux (modules de Fredholm non bornés). La non-localité de la formule définissant le caractère de Chern-Connes conduit Connes et Moscovici à introduire dans [11] la notion de triplet spectral. Le but étant d'obtenir une formule locale suffisamment générale qui recouvre non seulement la formule d'Atiyah-Singer, mais aussi des généralisations possibles à d'autres situations.

Les triplets spectraux sont une version non bornée des modules de Fredholm. Les axiomes qui les définissent viennent de propriétés importantes satisfaites par les opérateurs pseudodifférentiels sur une variété close. Nous nous concentrerons sur le cas impair. Le cas pair s'obtient en opérant les mêmes modifications que dans le cas borné.

DÉFINITION 12. Un triplet spectral (ou module de Fredholm non borné) est la donnée d'un triplet $(\mathcal{A}, H, D)$ composé de

(i) d'une $*$-algèbre $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{C}$, $*$-représentée en tant qu'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H,

(ii) d'un opérateur D non borné sur H, tel que

  (a) Pour tout $a \in \mathcal{A}$, $a(\lambda - D^2)^{-1}$ est compact, pour tout λ dans l'ensemble résolvant de D^2 (autrement dit, D est localement à résolvante compacte))

  (b) Pour tout $a \in \mathcal{A}$, $[D, a]$ est défini sur le domaine $\operatorname{dom} D$ de D, et s'étend en un opérateur borné sur H.

On dit qu'un triplet spectral $(\mathcal{A}, H, D)$ est *régulier* si $\mathcal{A}, [D, \mathcal{A}]$ sont inclus dans $\bigcap_{n \geqslant 1} \operatorname{dom} \delta^n$ où δ est la dérivation non bornée $\operatorname{ad} |D| = [|D|, .]$ sur l'algèbre des opérateurs bornés $\mathcal{B}(H)$.

EXEMPLE 13. Soit M une variété spin close de dimension impaire, D l'opérateur de Dirac associé agissant sur le fibré des spineurs S. Alors $(C^\infty(M), L^2(M, S), D)$ est un triplet spectral régulier. Connes donne un théorème de reconstruction [8], qui dit que sous des hypothèses supplémentaires, tous les triplets spectraux réguliers "commutatifs" sont de cette forme. Moralement, on peut penser aux triplets spectraux comme étant le pendant non commutatif d'une géométrie riemannienne.

Si $\mathcal{A}$ possède une unité, l'hypothèse (ii) permet d'appliquer le calcul fonctionnel holomorphe sur $\Delta = D^2$, en utilisant une intégrale de Cauchy. En particulier, on peut définir les puissances complexes Δ^{-z}, pour $z \in \mathbb{C}$ par

$$\Delta^{-z} = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int \lambda^{-z} (\lambda - \Delta)^{-1} d\lambda \tag{7}$$

où le contour d'intégration est une droite verticale séparant 0 et le spectre de Δ. Cette intégrale converge pour la norme d'opérateur lorsque $\mathrm{Re}(z) > 0$. Si $\mathrm{Re}(z) \leqslant 0$, il suffit d'écrire $\Delta^{-z} = \Delta^{-z-k}\Delta^k$, pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand.

REMARQUE 14. Cette construction fonctionne pour le triplet spectral de l'Exemple 13, car Δ est dans ce cas à résolvante compacte. Néanmoins, il sera important pour nous de considérer le cas où $\mathcal{A}$ est sans unité, où cela n'est plus vrai. Par exemple pour le triplet spectral $(C_c^\infty(M), L^2(M), D)$, avec M variété riemannienne *non compacte*, nous construirons les puissances complexes Δ^{-z} comme un opérateur pseudodifférentiel à support propre (modulo régularisants) en raisonnant directement au niveau symbolique ; en particulier $(\lambda - \Delta)^{-1}$ dans l'intégrale est remplacé par une paramétrix à paramètre.

Nous aurons besoin d'axiomes supplémentaires pour définir les fonctions zêta. Pour cela, rappelons tout d'abord le cas classique des fonctions zêta sur une variété riemannienne M de dimension n. Soit Δ un opérateur de type Laplace sur M, et P un opérateur (pseudo)différentiel d'ordre d *à support compact* sur M. Alors un théorème de Minakshisundaram et Pleijel [31] montre que la fonction zêta de P

$$\zeta_P(z) = \mathrm{Tr}(P\Delta^{-z})$$

est holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > \frac{n+d}{2}$, et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec au plus des pôles simples dans l'ensemble $\{\frac{n+d}{2}, \frac{n+d-1}{2}, \ldots\}$. Ceci mène à la définition suivante.

DÉFINITION 15. Un triplet spectral $(\mathcal{A}, H, D)$ a la propriété de *prolongement analytique* si pour tout P appartenant à la plus petite sous-algèbre engendrée par $\delta^n\mathcal{A}, \delta^n[D, \mathcal{A}]$, $n \geqslant 0$, la fonction zêta

$$\zeta_P(z) = \mathrm{Tr}(P\Delta^{-z})$$

existe pour $\mathrm{Re}(z) \gg 0$, et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. On dit que $(\mathcal{A}, H, D)$ a un *spectre de dimension simple* s'il a la propriété de prolongement analytique, et si tous les pôles de toutes les différentes fonctions zêta définies ci-dessus sont simples.

La localité, au sens où nous l'entendions plus haut, va venir des résultats de Wodzicki [46], qui montre que la fonctionnelle

$$\fint P = \mathrm{Res}_{z=0} \mathrm{Tr}(P\Delta^{-z}) \tag{8}$$

définit l'*unique trace* sur l'algèbre $\Psi_{\mathrm{cl,c}}(M)$ des opérateurs pseudodifférentiels classiques à support compact sur M *s'annulant sur les opérateurs régularisants*. Wodzicki montre également que le résidu de $P \in \Psi_{\mathrm{cl,c}}(M)$ est donné par une formule locale ne dépendant que de son symbole σ_{-n} d'ordre $-n$,

$$\fint P = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{S^*M} \iota_L \left(\sigma_{-n}(x, \xi) \frac{\omega^n}{n!} \right) \tag{9}$$

où L est le générateur du groupe à un paramètre des dilatations $(x, \lambda\xi)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ sur T^*M, donné localement par la formule $L = \sum_i \xi_i \partial_{\xi_i}$, ω est la forme symplectique standard sur T^*M et ι le produit intérieur. La définition de $\fint$ garde toujours un sens dans le cadre abstrait développé par Connes et Moscovici, ce qui les mène vers la *formule locale d'indice*.

THÉORÈME 16. (Connes-Moscovici, [11]) *Soit $(\mathcal{A}, H, D)$ un triplet spectral régulier ayant un spectre de dimension simple. Notons $\Delta = D^2$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ non nul, on définit une fonctionnelle sur $\mathcal{A}^{p+1}$ par*

$$\phi_p(a_0, \dots, a_p) = \sum_{k_1, \dots, k_p \geqslant 0} c_{p,k} \mathrm{Res}_{z=0} \mathrm{Tr} \left(a_0 [D, a_1]^{(k_1)} \dots [D, a_p]^{(k_p)} \Delta^{-\frac{p}{2} - |k| - z} \right)$$

où $|k| = k_1 + \dots + k_p$, $X^{(k_i)} = \mathrm{ad}(\Delta)^{k_i}(X) = \left[\Delta, \left[\ \dots, [\Delta, X]\right]\right]$, *et*

$$c_{p,k} = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(|k| + \frac{p}{2})}{(k_1 + 1)(k_1 + k_2 + 2) \dots (k_1 + \dots + k_p + p)}.$$

Alors $\phi = (\phi_p)_{p \in 2\mathbb{N}+1}$ est un (B, b)-cocycle cohomologue dans le (B, b)-bicomplexe au caractère de Chern-Connes $\mathrm{ch}(H, D|D|^{-1})$ *associé au module de Fredholm $(\mathcal{A}, H, D|D|^{-1})$. Pour cette raison, on note $\phi =$* $\mathrm{ch}(\mathcal{A}, H, D)$.

Connes et Moscovici obtiennent ce cocycle comme une limite $t \to 0$ du cocycle JLO [26] à des cobords près :

$$\mathrm{JLO}_p(a_0, \dots, a_p) = t^{p/2} \int_{\Delta_{n+1}} \mathrm{Tr} \left(a_0 e^{-t_0 D^2} [D, a_1] e^{-t_1 D^2} \dots [D, a_p] e^{-t_p D^2} \right) dt$$

Une construction plus directe, due à Higson [22], Appendice B, est possible en utilisant la théorie des cochaînes de Quillen.

EXEMPLE 17. L'application de ce résultat au triplet spectral $(C^\infty(M), L^2(S), D)$ de l'Exemple 13, on peut montrer que le calcul du caractère de Chern donne, à une constante près

$$\phi_n(a_0, \dots, a_p) = \int_M \widehat{A}(M) \wedge a_0 da_1 \dots da_p$$

où $\widehat{A}$ est le A-genus de M. L'idée est de se ramener par transformée de Mellin au noyau de la chaleur, et d'adapter une technique de rescaling développée par Getzler [3]. Pour les détails, le lecteur pourra consulter l'article de Ponge [39].

2.4. Feuilletages, calcul de Heisenberg et géométrie transverse. Avant de rappeler l'application des résultats de Connes et Moscovici à la géométrie transverse des feuilletages, il est nécessaire de faire quelques rappels sur le calcul de Heisenberg.

Soit M une variété feuilletée de dimension n (pas nécessairement compacte), et V le sous-fibré intégrable du fibré tangent TM de M définissant le feuilletage. Notons ν la dimension des feuilles, et $h = n - \nu$ leur codimension. L'idée fondamentale du calcul de Heisenberg est d'imposer que les champs de vecteurs *tangents aux feuilles* soient des opérateurs d'ordre 1, et que les champs de vecteurs *transverses* soient d'ordre 2. Le calcul de Heisenberg décrit le calcul qui permet de mettre en place cette idée.

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ un système de coordonnées feuilleté adapté, i.e, les champs de vecteurs

$$\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_\nu}$$

engendrent localement V, de telle sorte que

$$\partial_{x_{\nu+1}}, \dots, \partial_{x_n}$$

soient transverses aux feuilles. On note ensuite

$$|\xi|' = (\xi_1^4 + \ldots + \xi_\nu^4 + \xi_{\nu+1}^2 + \ldots + \xi_n^2)^{1/4}$$

$$\langle\alpha\rangle = \alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu + 2\alpha_{\nu+1} + \ldots 2\alpha_n$$

pour tous $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

DÉFINITION 18. Une fonction lisse $\sigma(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$ est un symbole de Heisenberg d'ordre $m \in \mathbb{R}$ si sur tout compact $K \subset \mathbb{R}^n_x$, et si pour tout multi-indice α, β, il existe $C = C_{K,\alpha,\beta} > 0$ vérifiant l'estimation suivante

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \sigma(x, \xi)| \leqslant C(1 + |\xi|')^{m - \langle\alpha\rangle}$$

On va se restreindre à la classe des *symboles de Heisenberg classiques*. Pour cela, on définit d'abord les *dilatations Heisenberg* :

$$\lambda \cdot (\xi_1, \dots, \xi_p, \xi_{p+1}, \dots, \xi_n) = (\lambda\xi_1, \dots, \lambda\xi_\nu, \lambda^2\xi_{\nu+1}, \dots, \lambda^2\xi_n)$$

pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$ non nul. Un symbole σ d'ordre m sera dit *classique* s'il admet un développement asymptotique lorsque $|\xi|' \to \infty$ du type :

$$\sigma(x, \xi) \sim \sum_{j \geqslant 0} \sigma_{m-j}(x, \xi) \tag{10}$$

où les $\sigma_{m-j}(x, \xi)$ sont *Heisenberg homogènes* d'ordre $m - j$, c'est à dire, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ non nul,

$$\sigma_{m-j}(x, \lambda \cdot \xi) = \lambda^{m-j} \sigma_{m-j}(x, \xi)$$

Le *symbole principal de Heisenberg* est le terme de plus haut degré dans le développement (10).

A un tel symbole σ d'ordre m, on associe l'opérateur

$$P : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad Pf(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \sigma(x, \xi) \widehat{f}(\xi) d\xi$$

où $\widehat{f}$ dénote la transformée de Fourier de f. On dira que P est un *opérateur pseudodifférentiel de Heisenberg classique* d'ordre m. Si P est à support propre, il définit en fait une application $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. On note $\Psi_H^m(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de tels opérateurs ayant un *support propre*, et $\Psi_{H,c}^m(\mathbb{R}^n)$ le sous-ensemble des opérateurs à support *compact*. Puisque les opérateurs à support propre peuvent être composés, les unions des opérateurs de tous ordres

$$\Psi_H(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{m \in \mathbb{R}} \Psi_H^m(\mathbb{R}^n)\,, \qquad \Psi_{H,c}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{m \in \mathbb{R}} \Psi_{H,c}^m(\mathbb{R}^n)$$

définissent des algèbres associatives sur $\mathbb{C}$. Les idéaux d'*opérateurs régularisants*

$$\Psi^{-\infty}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{m\in\mathbb{R}} \Psi^m_H(\mathbb{R}^n)\,, \qquad \Psi^{-\infty}_c(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{m\in\mathbb{R}} \Psi^m_{H,c}(\mathbb{R}^n)$$

correspondent respectivement aux algèbres d'opérateurs à noyau de Schwartz lisse ayant un support propre ou compact. Ce qui explique l'absence d'indice H dans la notation.

Si $P_1, P_2 \in \Psi_H(\mathbb{R}^n)$ sont des opérateurs pseudodifférentiels de Heisenberg classiques à support propre, de symboles respectifs σ_1 and σ_2, P_1P_2 est aussi un tel opérateur dont le symbole σ est donné par le développement asymptotique suivant, appelé *star produit* :

$$\sigma(x,\xi) = \sigma_1 \star \sigma_2(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|\geqslant 0} \frac{(-\mathbf{i})^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial^\alpha_\xi \sigma_P(x,\xi)\partial^\alpha_x \sigma_Q(x,\xi). \tag{11}$$

On peut noter que l'ordre des symboles dans la somme décroît lorsque $|\alpha|$ croît. Ainsi, $\Psi_H(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre.

On définit alors l'*algèbre des symboles de Heisenberg formels classiques* $\mathcal{S}_H(\mathbb{R}^n)$ et sa sous-algèbre de symboles à support compact comme les quotients

$$\mathcal{S}_H(\mathbb{R}^n) = \Psi_H(\mathbb{R}^n)/\Psi^{-\infty}(\mathbb{R}^n), \qquad \mathcal{S}_{H,c}(\mathbb{R}^n) = \Psi_{H,c}(\mathbb{R}^n)/\Psi^{-\infty}_c(\mathbb{R}^n)$$

Ses éléments sont des sommes formelles données en (10), et le produit est le star-produit (11). On peut noter que le $\sim$ est remplacé par une égalité au niveau formel.

Un symbole de Heisenberg est dit *Heisenberg elliptique* (en abrégé H-*elliptique*) s'il est inversible dans $\mathcal{S}_H(\mathbb{R}^n)$. Ceci équivaut à dire que le *symbole principal de Heisenberg* est inversible sur $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi \smallsetminus \{0\}$. Ces symboles ne sont plus nécessairement elliptiques au sens usuel. Néanmoins, lorsque M est compacte, les opérateurs associés sont *hypoelliptiques*, et ils gardent la propriété d'être de Fredholm lorsque qu'on les fait agir entre espaces de Sobolev adaptés à ce contexte (cf. par exemple [**21**]).

EXEMPLE 19. Le *laplacien sous-elliptique*

$$\Delta_H = \partial^4_{x_1} + \ldots + \partial^4_{x_\nu} - (\partial^2_{x_{\nu+1}} + \ldots + \partial^2_{x_n})$$

a pour symbole principal de Heisenberg $\sigma(x,\xi) = |\xi|'^4$, et est donc Heisenberg elliptique. Cependant, son symbole principal au sens usuel est $(x,\xi) \mapsto \sum_{i=1}^p \xi_i^4$, de sorte qu'il n'est clairement pas elliptique.

Pour finir, le calcul pseudodifferentiel de Heisenberg peut se définir globalement sur tout feuilletage par l'intermédiaire de partitions de l'unité. Pour un feuilletage (M, V), on note alors $\Psi^m_H(M)$ l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels de Heisenberg classiques sur M, et $\Psi^m_{H,c}(M)$ sa sous-algèbre d'opérateurs à support compact.

Pour un fibré vectoriel complexe ($\mathbb{Z}_2$-gradué) E sur M, on définit de façon analogue l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels de Heisenberg $\Psi_H(M,E)$ et sa version à support compact, agissant sur les sections lisses $C^\infty(M,E)$ de E. Notons que pour $a \in \mathcal{S}_H(M,E)$, $(x,\xi) \in T^*_xM$, on a $a(x,\xi) \in \mathrm{End}(E_x)$.

Résidus de Wodzicki sur les feuilletages. Les résultats de Minakshisundaram-Pleijel et de Wodzicki peuvent se généraliser au contexte des feuilletages. Grâce à une partition de l'unité, on peut construire un sous-laplacien sous-elliptique Δ à partir de l'Exemple 19. Ses puissances complexes Δ^{-z} sont définies comme les opérateurs pseudodifférentiels à support propre suivants, utilisant le paramétrix $(\lambda - \Delta)^{-1}$ et une intégrale de Cauchy appropriée

$$\Delta^{-z} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int \lambda^{-z}(\lambda - \Delta)^{-1}\, d\lambda$$

où le contour est une ligne verticale pointant vers le bas.

THÉORÈME 20. (Connes-Moscovici, [11]) *Soit* (M, V) *une variété feuilletée de dimension* n*, où* $V \subset TM$ *est le sous-fibré intégrable définissant le feuilletage,* ν *la dimension des feuilles,* h *leur codimension et* $P \in \Psi^m_{H,c}(M)$ *un opérateur pseudodifférentiel de Heisenberg à support compact d'ordre* $m \in \mathbb{R}$*. Alors pour tout laplacien sous-elliptique* Δ*, la fonction zêta*

$$\zeta_P(z) = \mathrm{Tr}(P\Delta^{-z/4})$$

est holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > m + \nu + 2n$*, et s'étend en une fonction méromorphe sur le plan complexe, avec au plus des pôles simples dans l'ensemble*

$$\{m + \nu + 2n, m + \nu + 2n - 1, \ldots\}$$

THÉORÈME 21. (Connes-Moscovici, [11]) *Le résidu de Wodzicki*

$$⨍ : \mathcal{S}_{H,c}(M) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad P \longmapsto \mathrm{Res}_{z=0}\mathrm{Tr}(P\Delta^{-z/4})$$

est, à constante multiplicative près, l'unique trace sur $\mathcal{S}_{H,c}(M)$*. De plus, on a la formule suivante, ne dépendant que du symbole* σ *of* P *à un ordre fini :*

$$⨍ P = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{S^*_H M} \iota_L \left(\sigma_{-(\nu+2n)}(x, \xi) \, \frac{\omega^n}{n!} \right) \tag{12}$$

$S^*_H M$ désigne la sphère cotangente de Heisenberg, c'est à dire

$$S^*_H M = \{(x, \xi) \in T^*M \,;\, |\xi|' = 1\}$$

L est le générateur des dilatations Heisenberg donné localement par la formule

$$L = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i \partial_{\xi_i} + 2 \sum_{i=\nu+1}^{n} \xi_i \partial_{\xi_i},$$

ι désigne le produit intérieur et ω la forme symplectique standard sur T^*M.

REMARQUE 22. Tous ces résultats s'étendent au cas où les opérateurs de Heisenberg agissent sur les sections d'un fibré E sur M : dans ce cas, le symbole $\sigma_{-(p+2q)}(x, \xi)$ est en chaque point (x, ξ) un endomorphisme agissant sur la fibre E_x, et (12) devient :

$$⨍ P = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{S^*_H M} \iota_L \left(\mathrm{tr}(\sigma_{-(\nu+2n)}(x, \xi)) \, \frac{\omega^n}{n!} \right)$$

où tr dénote la trace d'un endomorphisme.

Géométrie transverse des feuilletages. A partir ces résultats que l'on peut construire un triplet spectral régulier associé à la géométrie transverse d'un feuilletage $(Z, \mathcal{F})$, *qui n'est toutefois pas le feuilletage qui sera considéré !*

En choisissant à une transversale W du feuilletage, Connes et Moscovici réduisent le problème à l'étude du produit croisé $C^\infty_c(W) \rtimes G$ par un (pseudo)groupe discret de difféomorphismes $G \subset \mathrm{Diff}(W)$, qui transcrit l'holonomie du feuilletage. Un premier problème qui se pose est que l'on se trouve dans une situation "de type III". En effet, G ne préserve en général aucune mesure sur W, et encore moins une métrique riemannienne, de sorte qu'il n'existe pas d'opérateur elliptique invariant sous l'action de G, même au niveau du symbole principal. Pour remédier à cela, on se ramène par un isomorphisme de Thom à une situation de "type II", utilisant l'astuce suivante venant de [6]. On se place sur le fibré des métriques $M = F/O_n(R)$ au-dessus de W, où F est le fibré des repères de W. Cette fibration est en particulier un feuilletage, les feuilles étant les fibres. *C'est ce feuilletage là qui nous intéresse.* L'action de G se relève à M tout en préservant la fibration, de sorte que le sous-fibré intégrable de $V \subset TM$ tangent aux fibres soit G-équivariant. Il est muni d'une métrique G-invariante du fait que les fibres de M sont des espaces symétriques $GL_n(\mathbb{R})/O_n(\mathbb{R})$. De plus, le quotient $N = TM/V$ est isomorphe à l'image réciproque p^*TW, et tout point de M définit ainsi une métrique G-invariante sur ce dernier.

Connes et Moscovici construisent ensuite un opérateur de signature D presque invariant par G, dans le sens où le symbole principal de D (au sens Heisenberg) est G-invariant. Leur opérateur agit sur les sections du fibré

$$E = \Lambda^\bullet(V^* \otimes \mathbb{C}) \otimes \Lambda^\bullet(N^* \otimes \mathbb{C})$$

qui est isomorphe à $\Lambda^\bullet(T^*M \otimes \mathbb{C})$, mais d'une façon non canonique qui requiert le choix d'une connexion. En revanche, cet isomorphisme est canonique au niveau des formes volumes. Ceci qui explique pourquoi on ne pourra obtenir mieux qu'un opérateur presque G-invariant en général. Grossièrement, la construction de D est la suivante : on considère l'opérateur

$$Q = (d_H + d_H^*) \pm (d_V d_V^* - d_V^* d_V)$$

qui est moralement la somme d'un opérateur de signature horizontal et d'un opérateur de signature vertical[5] par rapport à la fibration. Le symbole Q est $(x, \xi) \mapsto |\xi|'^4$, et on définit finalement D par la formule $Q = D|D|$. On a à ce stade un problème d'indice bien posé.

Un problème est à soulever pour l'obtention d'un K-cycle, du fait que D n'est pas elliptique mais hypoelliptique. Néanmoins, en construisant la classe fondamentale transverse en K-homologie, Hilsum et Skandalis ont auparavant montré dans [24] que des K-cycles pouvaient précisément être construits avec des opérateurs hypoelliptiques. Connes et Moscovici raffinent cette observation à leur contexte.

THÉORÈME 23. (Connes-Moscovici, [11]) $(C_c^\infty(M) \rtimes G, L^2(M, E), D)$ *est un triplet spectral régulier de spectre de dimension simple.*

REMARQUE 24. Le théorème est énoncé plus généralement pour des *structures triangulaires* G-invariantes sur une variété M, c'est à dire, la donnée d'un sous-fibré intégrable $V \subset TM$ tel que V et TM/V soient munis de métriques euclidiennes G-invariantes.

Ainsi, leur formule locale de résidus s'applique directement à l'opérateur D. Cependant, elle ne permet pas directement de remonter à des classes caractéristiques comme dans l'Exemple 17, les calculs donnent des milliers de termes seulement pour des feuilletages de codimension 1 ... Pour contourner ce problème de calcul en codimensions supérieures, Connes et Moscovici développent la cohomologie cyclique des algèbres de Hopf [12]. Ils construisent alors une telle algèbre $\mathcal{H}$, dont le rôle est d'agir comme un groupe de symétries permettant d'organiser judicieusement les calculs, et construisent une application caractéristique

$$\chi : HP^\bullet_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}) \longrightarrow HP^\bullet(C_c^\infty(M) \rtimes G)$$

THÉORÈME 25. (Connes-Moscovici, [12]) *Le caractère de Chern-Connes du triplet spectral transverse* $(C_c^\infty(M) \rtimes G, L^2(M, E), D)$ *est contenu dans l'image de l'application caractéristique* χ.

Le groupe $HP^\bullet_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H})$ contient en un certain sens les cocycles géométriques : Connes et Moscovici montrent qu'il est isomorphe à la cohomologie de Gel'fand-Fuchs $H^\bullet(WSO_n)$, qui contient les classes caractéristiques. On peut ainsi voir χ comme un analogue non commutatif de l'application de Chern-Weil entre la cohomologie de Gel'fand-Fuchs et la cohomologie équivariante (cf. Bott [4]). Obtenir un théorème d'indice revient maintenant à trouver l'antécédent géométrique du caractère de Chern-Connes par χ. Connes et Moscovici énoncent alors le résultat suivant :

---

5. Connes et Moscovici construisent en effet $d_V d_V^* - d_V^* d_V$ comme une déformation de l'opérateur de signature vertical $d_V + d_V^*$

L'antécédent du caractère de Chern-Connes par χ est contenu dans l'anneau des polynômes en les classes de Pontryagin.

Un calcul explicite est donné dans [12] en codimension 1, on retrouve (deux fois) la classe fondamentale transverse de [6]. En codimension 2, les auteurs montrent que le coefficient de la première classe de Pontryagin n'est pas nul. Le résultat du Chapitre 3 de cette thèse permet d'effectuer le calcul général en codimension quelconque. Nous prendrons une route alternative résumée dans le diagramme qui suit,

$$\underset{\text{cohomologie équivariante}}{H^\bullet(EG \times_G S^*_H M)} \xrightarrow[\text{Connes [6]}]{\Phi} HP^\bullet(C^\infty_c(S^*_H M) \rtimes G) \xrightarrow{\pi^*} HP^\bullet(C^\infty_c(M) \rtimes G)$$

où $\pi : S^*_H M \to M$ est la projection canonique, et n'utilisant pas les algèbres de Hopf. Elle a déjà été utilisée par Connes pour le problème de la classe fondamentale transverse.

2.5. Approche générale par les extensions. L'approche adoptée dans ce mémoire pour les problèmes d'indice repose en grande partie sur les travaux de Cuntz-Quillen, qui démontrent la propriété d'excision en (co)homologie cyclique périodique [14]. On considère des "*problèmes d'indice abstraits*", qui s'énoncent à partir d'extensions d'algèbres associatives. Plus précisément, soit $\mathcal{A}$ une telle algèbre sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{A}$, et considérons l'extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I} \longrightarrow 0$$

Notons les applications de bord Ind en K-théorie algébrique et ∂ en homologie cyclique périodique. On obtient alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} K_1^{alg}(\mathcal{A}/\mathcal{I}) & \xrightarrow{\text{Ind}} & K_0^{alg}(\mathcal{I}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle ch_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle ch_0} \\ HP_1(\mathcal{A}/\mathcal{I}) & \xrightarrow{\partial} & HP_0(\mathcal{I}) \end{array}$$

où ch_0 et ch_1 sont les caractères de Chern en K-théorie rappelés en (5) et (6).

Nistor montre dans [33] que ce diagramme commute. Notons encore $\partial : HP^0(\mathcal{I}) \to HP^1(\mathcal{A}/\mathcal{I})$ la flèche d'excision en cohomologie. Si $[\tau] \in HP^0(\mathcal{I})$, $[g] \in K_1^{alg}(\mathcal{A}/\mathcal{I})$, alors on a une égalité entre les couplages

$$\langle [\tau], ch_0 \text{Ind}([u]) \rangle = \langle \partial[\tau], ch_1[u] \rangle \tag{13}$$

On peut penser au membre de gauche comme l'indice analytique, celui de droite donne les formules qui calculent l'indice topologique. Nistor retrouve notamment par cette approche le théorème de l'indice pour les revêtements de Connes-Moscovici dans [33], et le théorème d'Atiyah-Patodi-Singer sur des variétés à cusps dans [32]. Nous verrons par la suite comment choisir des extensions pseudodifférentielles adaptées, permettant d'obtenir des formules locales d'indice. Pour l'instant, nous terminons le paragraphe avec les deux exemples suivants.

EXEMPLE 26. Esquissons la construction de $\partial[\tau]$ lorsque τ est une hypertrace sur $\mathcal{I}$, c'est à dire une forme linéaire sur $\mathcal{I}$ telle que $\tau([\mathcal{A}, \mathcal{I}]) = 0$. On "renormalise" τ en une application linéaire $\tau_R : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, qui coïncide avec τ lorsque restreinte à $\mathcal{I}$. Cette dernière n'est pas une trace, mais on peut alors considérer le cocycle cyclique sur $\mathcal{A}$ défini par

$$\phi(a_0, a_1) = b\tau_R(a_0, a_1) = \tau_R([a_0, a_1])$$

Ce cocycle passe au quotient $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ et fournit un représentant de $\partial[\tau]$.

EXEMPLE 27. Soit $(\mathcal{A}, H, F)$ un module de Fredholm impair p-sommable avec $F^2 = 1$. On note $\ell^p(H)$ la p-ième classe de Schatten. Notons comme d'habitude $P = \frac{1+F}{2}$. On a alors une extension

$$0 \longrightarrow \ell^p(H) \longrightarrow \ell^p(H) + \rho(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}/\mathrm{Ker}(\rho) \longrightarrow 0$$

où $\rho(a) = PaP$. Le cocycle cyclique sur $\ell^p(H)$

$$\tau(x_0, \ldots, x_{p-1}) = \mathrm{Tr}(x_0 \ldots x_{p-1})$$

donne un générateur $[\tau]$ de $HP^0(\ell^p(H))$. On peut alors montrer que le caractère de Chern-Connes du module de Fredholm est l'image $\partial[\tau]$ de cet élément par excision. Une interprétation similaire existe pour le cas pair. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter l'article de Cuntz dans [15], Sections 3.3 et 3.4.

3. Présentation des résultats

Nous allons maintenant donner un plan détaillé de cette thèse, et en annoncer les résultats principaux. Nous avons choisi de ne pas regrouper les pré-requis (autres que ceux donnés dans en Introduction) dans un paragraphe isolé, mais de les introduire au fur et à mesure des besoins dans les chapitres concernés, en espérant orienter plus efficacement la lecture.

Les Chapitres 1, 2 et 4 sont tirés, de l'article [42], excepté la dernière section du Chapitre 1 qui vient de [38]. Le reste est similaire, à quelques modifications et corrections mineures près. Le Chapitre 3 est extrait de l'article [38].

3.1. Chapitre 1. Formule locale d'indice pour des opérateurs elliptiques abstraits. Le but de ce chapitre est d'établir une *formule locale d'indice* pour des "opérateurs elliptiques abstraits" en combinant une renormalisation de la fonction zêta avec la propriété d'excision en cohomologie cyclique. Afin de donner un sens à cette assertion, donnons un aperçu rapide des notions nécessaires, développées par Higson [22].

On se donne un espace de Hilbert (complexe) H et un opérateur Δ non-borné, positif et autoadjoint sur H. Notons H^∞ l'intersection,

$$H^\infty = \bigcap_{k \geqslant 0} \mathrm{dom}(\Delta^k)$$

DÉFINITION. Une algèbre $\mathcal{D}(\Delta)$ d'*opérateurs différentiels abstraits* associée à Δ est une algèbre d'opérateurs sur H^∞ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) L'algèbre $\mathcal{D}(\Delta)$ est filtrée,

$$\mathcal{D}(\Delta) = \bigcup_{q \geqslant 0} \mathcal{D}_q(\Delta)$$

i.e $\mathcal{D}_p(\Delta) \cdot \mathcal{D}_q(\Delta) \subset \mathcal{D}_{p+q}(\Delta)$. Un élément $X \in \mathcal{D}_q(\Delta)$ est appelé *opérateur différentiel abstrait d'ordre au plus* q.

(ii) Il existe $r > 0$ ("l'ordre de Δ") tel que pour tout $X \in \mathcal{D}_q(\Delta)$, $[\Delta, X] \in \mathcal{D}_{r+q-1}(\Delta)$.

Pour le dernier point, on définit, pour $s \in \mathbb{R}$, l'*espace de Sobolev* H^s comme le sous-espace $\mathrm{dom}(\Delta^{s/r})$ de H, qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|v\|_s = (\|v\|^2 + \|\Delta^{s/r} v\|^2)^{1/2}$$

(iii) *Estimation elliptique.* Si $X \in \mathcal{D}_q(\Delta)$, alors, il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que

$$\|v\|_q + \|v\| \geqslant \varepsilon \|Xv\| \,, \forall v \in H^\infty$$

Ce formalisme est motivé par des propriétés importantes vérifiées par les opérateurs différentiels sur une variété. L'un des intérêts majeurs est d'unifier des situations diverses dans un même contexte et d'être assez flexible pour permettre de définir un calcul pseudodifférentiel associé. Dans les cas qui nous intéressent, le calcul pseudodifférentiel classique et le calcul de Heisenberg sur un feuilletage sont couverts par ce formalisme.

Soit $\Psi(\Delta)$ une algèbre d'opérateurs pseudodifférentiels associée à une algèbre d'opérateurs différentiels abstraits $\mathcal{D}(\Delta)$. Notons

$$\Psi^{-\infty}(\Delta) = \bigcap_{m\in\mathbb{R}} \Psi^m(\Delta)$$

l'idéal des "opérateurs régularisants". On a alors une extension pseudodifférentielle

$$0 \longrightarrow \Psi^{-\infty}(\Delta) \longrightarrow \Psi(\Delta) \longrightarrow \mathcal{S}(\Delta) = \Psi(\Delta)/\Psi^{-\infty}(\Delta) \longrightarrow 0 \tag{14}$$

où l'on peut penser à $\mathcal{S}(\Delta)$ comme étant une *algèbre des symboles formels abstraits*. La trace d'opérateurs Tr sur H est définie sur Ψ^{∞}, donnant ainsi une classe de cohomologie cyclique $[\mathrm{Tr}] \in HP^0(\Psi^{-\infty}(\Delta))$. Pour obtenir une formule d'indice, il suffira ainsi de calculer le bord de la trace $\partial[\mathrm{Tr}] \in HP^1(\mathcal{S}(\Delta))$, suivant la recette décrite en Introduction, Section 2.5. Les fonctions zêta rentrent en jeu à ce moment là.

On suppose qu'il existe $d \geqslant 0$ tel que pour tout $P \in \Psi^m(\Delta)$, l'opérateur $P\Delta^{-z}$ s'étende en un opérateur à trace sur H, pour $z \in \mathbb{C}$ appartenant au demi-plan $\mathrm{Re}(z) > \frac{m+d}{r}$, de telle sorte que la fonction zêta de P

$$\zeta_P(z) = \mathrm{Tr}(P\Delta^{-z/r})$$

soit bien définie. On suppose également que pour tout $P \in \Psi^m(\Delta)$, ζ_P est holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > m + d$, et qu'elle s'étend en une fonction méromorphe sur le plan complexe, avec des pôles dans l'ensemble

$$\{m + d, m + d - 1, \dots\}$$

On peut alors relever la trace sur $\Psi^{-\infty}(\Delta)$ en une application linéaire τ_R sur $\Psi(\Delta)$ en utilisant une renormalisation de la fonction zêta :

$$\tau_R(P) = \mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}(P\Delta^{-z/r})$$

où Pf désigne le terme constant dans le développement de Laurent de ζ_P en $z = 0$. On peut à partir de là calculer un représentant de $\partial[\mathrm{Tr}]$, qui donne le résultat suivant.

THEORÈME I. (THEOREM 1.13) *On suppose que pour tout $P \in \Psi(\Delta)$, le pôle en 0 de la fonction zêta est d'ordre $p \geqslant 1$. Alors l'image $\partial[\mathrm{Tr}] \in HP^1(S)$ de la trace d'opérateurs $[\mathrm{Tr}] \in HP^0(\Psi^{-\infty})$ par excision en cohomologie cyclique périodique est représentée par le 1-cocycle cyclique suivant, que l'on appelle* cocycle de Radul généralisé *:*

$$c(a_0, a_1) = {\textstyle\fint^{1}} a_0\delta(a_1) - \frac{1}{2!}{\textstyle\fint^{2}} a_0\delta^2(a_1) + \dots + \frac{(-1)^{p-1}}{p!}{\textstyle\fint^{p}} a_0\delta^p(a_1)$$

où $\delta(a) = [\log \Delta^{1/r}, a]$ et $\delta^k(a) = \delta^{k-1}(\delta(a))$ est défini par récurrence, pour tout $a \in \Psi(\Delta)$,

$$\fint^{k} P = \mathrm{Res}_{z=0} z^{k-1}\mathrm{Tr}(P\Delta^{-z/r})$$

Ce cocycle est la généralisation du cocycle de Radul [41], qui est obtenu lorsque Ψ est l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels classiques sur une variété close. Il a été introduit dans le contexte de la cohomologie des algèbres de Lie.

Si $p = 1$, $\fint^1$ est le résidu de Wodzicki usuel. En général, les $\fint^k$ ne sont pas des traces sur $\Psi(\Delta)$ en général, sauf si $k = p$.

Ainsi, l'excision transfère le cocycle non-local sur $\Psi^{-\infty}(\Delta)$ donné par la trace vers le cocyle local donné par le cocycle de Radul, permettant d'adopter un point de vue algébrique. A cet égard, on observe des similitudes avec la formule de Connes et Moscovici à travers l'utilisation du résidu de Wodzicki. Notons également que les techniques de calcul permettant l'obtention de cette formule leur sont en majeure partie dues.

On peut à priori observer une différence : notre cocycle est défini directement sur une algèbre d'opérateurs pseudodifférentiels, alors que le caractère de Chern-Connes est défini sur l'algèbre du triplet spectral. On peut en fait montrer que ce cocycle se rétracte sur ce dernier lorsqu'on associe $\mathcal{D}(\Delta)$ à un triplet spectral (plus précisément, le module de Fredholm associé).

En effet, soit $(\mathcal{A}, H, F)$ un module de Fredholm p-sommable impair. De plus, soit $\Psi = \Psi(\Delta)$ une algèbre d'opérateurs pseudodifférentiels abstraits telle que

(1) Ψ^0 est une algèbre d'opérateurs bornés sur H contenant la représentation de $\mathcal{A}$,

(2) Ψ^{-1} est un idéal bilatère composé d'opérateurs p-sommables sur H,

(3) F est une multiplicateur de Ψ^0 et $[F, \Psi^0] \subset \Psi^{-1}$.

On considère ensuite la suite exacte suivante, qui est une abstraction de celle que donne le symbole principal :

$$0 \longrightarrow \Psi^{-1} \longrightarrow \Psi^0 \longrightarrow \Psi^0/\Psi^{-1} \longrightarrow 0 \tag{15}$$

Cette extension se compare facilement à celle associée aux opérateurs régularisants (14). Soit $P = \frac{1}{2}(1+F)$, et ρ_F le morphisme d'algèbres

$$\rho_F \ : \ \mathcal{A} \longrightarrow \Psi^0/\Psi^{-1} \ , \qquad \rho_F(a) = PaP \bmod \Psi^{-1}.$$

THEORÈME II. (THEOREM 1.17) *Le caractère de Chern du module de Fredholm* (H, F) *est donné par la classe de cohomologie cyclique impaire* $\mathcal{A}$

$$\mathrm{ch}(H, F) = \rho_F^* \circ \partial([\mathrm{Tr}])$$

où $[\mathrm{Tr}] \in HP^0(\Psi^{-1})$ *est la classe de cohomologie cyclique de la trace d'opérateurs,* $\partial : HP^0(\Psi^{-1}) \to HP^1(\Psi^0/\Psi^{-1})$ *est la flèche d'excision associée à l'extension (15), et* $\rho_F^* : HP^1(\Psi^0/\Psi^{-1}) \to HP^1(\mathcal{A})$ *est induite par* ρ_F.

La formule obtenue donne directement par couplage avec la K-théorie une formule locale d'indice pour des opérateurs elliptiques abstraits. A titre d'exemple, qui sera mieux détaillé dans le chapitre concerné, on peut noter que si $\mathcal{D}(\Delta)$ est l'algèbre des opérateurs différentiels sur le cercle S^1, on retrouve directement le théorème de Noether. Ceci vient du fait que le résidu de Wodzicki d'un opérateur pseudodifférentiel classique ne dépend que du symbole d'ordre -1 dans son développement asymptotique, et les calculs se font sans effort. En revanche, pour une variété close M quelconque de dimension n, on devra calculer le symbole d'ordre $-n$ dans ce développement, ce qui rend la tâche bien plus difficile, voire impossible si l'on attaque le problème de front. Le même problème se pose si M est feuilletée, de codimension h et $\nu = n - h$, où l'on doit calculer le symbole de Heisenberg d'ordre $-(\nu + 2h)$.

Plan du chapitre. La Section 1 du chapitre rappelle en détail le formalisme développé par Higson [**22**] sur les opérateurs différentiels abstraits, ainsi que la notion de calcul pseudodifférentiel associée introduite par Uuye dans [**45**]. Nous en profiterons également pour introduire les objets dont nous aurons besoin pour notre formule locale d'indice.

La Section 2 établit la formule d'indice générale annoncée au Théorème I.

La Section 3 fait le lien entre le cocycle de Radul et le caractère de Chern-Connes en établissant le Théorème II.

3.2. Chapitre 2. Le cas plat. L'objectif de cette partie est de comprendre sur un exemple comment contourner la difficulté posée par le calcul du cocycle de Radul, dans le cadre des feuilletages. On se focalise sur le cas de $\mathbb{R}^n$ vu comme un feuilletage trivial $\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^h$, les feuilles étant $\mathbb{R}^\nu$. L'algèbre $\mathcal{D}(\Delta)$ considérée est celle des opérateurs différentiels à support compacts, que l'on munit de l'ordre du calcul de Heisenberg. L'opérateur Δ est le sous-laplacien sous-elliptique de l'Exemple 19. Notons $\Psi^0_{H,c}(\mathbb{R}^n)$ l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels de Heisenberg classiques d'ordre 0 à *support compact* sur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^h$, et $S^0_{H,c}(\mathbb{R}^n)$ l'algèbre des symboles de Heisenberg formels d'ordre 0 à *support compact*. Par le Théorème 20, les fonctions zêta ont des pôles simples, et le cocycle de Radul sur $S_{H,c}(\mathbb{R}^n)$ est de la forme

$$\phi(a_0, a_1) = ⨍ a_0[\log \Delta^{1/4}, a_1],$$

où $⨍$ est le résidu de Wodzicki, et est donné par intégration du symbole d'ordre $-(\nu + 2h)$ de l'opérateur sur la sphère cotangente $S^*_H\mathbb{R}^n$ associée au calcul de Heisenberg (cf. Théorème 21).

L'idée générale est alors de construire un (B, b)-cocycle de degré supérieur cohomologue au cocycle de Radul dans le (B, b)-bicomplexe, faisant apparaître directement des résidus d'opérateurs d'ordre $-(\nu + 2h)$. Ceci nous autorise à nous réduire au niveau du symbole principal au sens Heisenberg

$$\sigma : \mathcal{S}^0_H(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(S^*_H\mathbb{R}^n),$$

et à passer d'une formule non commutative (star-produit des symboles) à une formule commutative (multiplication des symboles principaux) pour le cocycle de Radul.

THEORÈME III. (THEOREM 2.5) *Le cocycle de Radul ϕ est (B, b)-cohomologue au cocycle cyclique ψ sur $\mathcal{S}^0_H(\mathbb{R}^n)$ défini par*

$$\psi_{2n-1}(a_0, \ldots, a_{2n-1}) = -\frac{1}{(2\pi \mathbf{i})^n} \int_{S^*_H\mathbb{R}^n} \sigma(a_0) d\sigma(a_1) \ldots d\sigma(a_{2n-1})$$

On donne deux constructions permettant d'obtenir ce cocycle. La première fait appel une nouvelle fois à l'excision en cohomologie cyclique périodique : l'idée est de transférer par excision des cocycles cycliques sur $\Psi^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, analogues à ceux de Connes (Théorème 11), à des (B, b)-cocycles sur $\mathcal{S}^0_H(\mathbb{R}^n)$. La seconde construction fait appel à la théorie des cochaînes de Quillen (i.e le X-complexe pour les cogèbres), qui permet d'obtenir le cocycle ci-dessus en faisant du "Chern-Weil non commutatif". L'intérêt de cette seconde construction est d'être purement algébrique et de court-circuiter l'étape consistant à travailler d'abord avec les opérateurs régularisants. Un raffinement de cette construction donnera notamment les cocycles permettant d'établir le théorème général du chapitre suivant.

Dans les deux cas, un ingrédient important pour la construction des cocycles intermédiaires entre le cocycle de Radul et celui du théorème ci-dessus, est l'existence d'un opérateur particulier que l'on note F, agissant sur les symboles et tel que le commutateur $[F, a]$ avec un symbole $a \in \mathcal{S}_H(\mathbb{R}^n)$ donne la différentielle da. La notation adoptée deviendra plus transparente par la suite.

On obtient alors le corollaire suivant après couplage avec la K-théorie et utilisation de la formule (13), qui généralise une formule d'indice sur $\mathbb{R}^n$ due à Fedosov [**17**] au calcul de Heisenberg.

THEORÈME IV. (THEOREM 2.12) *Soit $P \in M_N(\Psi^0_{H,c}(\mathbb{R}^n)^+)$ un opérateur Heisenberg elliptique de symbole formel $u \in GL_N(\mathcal{S}^0_{H,c}(\mathbb{R}^n)^+)$, et $[u] \in K_1(\mathcal{S}^0_{H,c}(\mathbb{R}^n)^+)$ sa classe de K-théorie. Alors l'indice de Fredholm de P est donné par la formule :*

$$\mathrm{Ind}(P) = \frac{(-1)^n(n-1)!}{(2\pi \mathbf{i})^n(2n-1)!} \int_{S^*_H\mathbb{R}^n} \mathrm{tr}(\sigma(u)^{-1} d\sigma(u)(d\sigma(u)^{-1} d\sigma(u))^{n-1})$$

Cet exemple, en dépit de sa simplicité, sera important pour guider le compréhension du cas général au Chapitre 3. Il donne une idée des objets qu'on aura à introduire, et un premier aperçu des calculs qu'on attend.

Plan du chapitre. La Section 1 donne le contexte général de l'exemple et introduit les objets nécessaires (notamment l'opérateur F mentionné plus haut) pour les constructions faites dans la suite du chapitre.

La Section 2 prouve le Théorème III en utilisant la construction par excision.

La Section 3 retrouve les cocycles obtenus à la section précédente en utilisant la formalisme des cochaînes de Quillen.

La Section 4 termine les calculs, permettant d'obtenir le théorème d'indice.

Les deux dernières sections sont des compléments des Sections 2 et 3.

3.3. Chapitre 3. Théorème d'indice équivariant pour des opérateurs H-elliptiques. Le but de ce chapitre est d'établir un théorème d'indice général sur les feuilletages, généralisant ceux du précédent chapitre. Le présent résultat permet également de résoudre le problème posé par Connes et Moscovici présenté dans en Introduction, Section 2.4.

Soit (M, V) une variété feuilletée non nécessairement compacte, et $G \subset \mathrm{Diff}(M)$ un sous-groupe discret de difféomorphismes de M préservant les feuilles de M, agissant *à droite* de M. Aucune hypothèse supplémentaire sur l'action n'est requise. On considère alors l'extension pseudodifférentielle

$$0 \longrightarrow \Psi_c^{-\infty}(M) \rtimes G \longrightarrow \Psi_{H,c}^0(M) \rtimes G \longrightarrow S_{H,c}^0(M) \rtimes G \longrightarrow 0,$$

qui est la version équivariante de celle associée au calcul de Heisenberg. Toutefois, notons que la représentation de éléments de $\Psi_{H,c}^0(M) \rtimes G$ en tant qu'opérateurs sur $C_c^\infty(M)$ ne donne pas des opérateurs pseudodifférentiels de Heisenberg. En effet, un élément $P \in \Psi_{H,c}^0(M) \rtimes G$ étant de la forme

$$P = \sum_{g \in G} P_g \otimes U_g$$

et est représenté (non fidèlement) par l'élément

$$P = \sum_{g \in G} P_g U_g : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

où $U_g : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ est l'opérateur de shift $U_g(f)(x) = f(x \cdot g) = (f \circ g)(x)$, pour $x \in M$. De tels opérateurs appartiennent à la classe plus large des opérateurs de type *Fourier intégral*. On peut toujours étudier leur théorie de l'indice, au moins dans un premier temps au sens des extensions selon l'approche développée tout au long de ce mémoire. En réalité, les travaux de Savin et Sternin [43] permettent de montrer que si M est compacte, de tels opérateurs ayant leur symbole formel inversible dans $S_H^0(M) \rtimes G$ sont de Fredholm. Adaptant la formule générale obtenue au Chapitre 1, on peut déterminer le cocycle de Radul associé à l'extension pseudodifférentielle ci-dessus. Soit $\mathrm{Tr}_{[1]}$ la trace sur $\Psi_c^{-\infty}(M) \rtimes G$ définie comme la trace usuelle sur $\Psi_c^{-\infty}(M)$ localisée à l'unité de G :

$$\mathrm{Tr}_{[1]}\left(\sum_{g \in G} K_g \otimes U_g\right) = \mathrm{Tr}(K_1)$$

THEORÈME V. (THEOREM 3.5) *Le bord de la trace localisée* $\partial[\mathrm{Tr}_{[1]}] \in HP^1(\mathcal{S}_{H,c}(M) \rtimes G)$ *est représenté par le* cocycle de Radul équivariant

$$\phi(a_0, a_1) = ⨍ \left(a_0[\log \Delta_H^{1/4}, a_1]\right)_{[1]}$$

où $\Delta_H^{1/4}$ *est le laplacien sous-elliptique associé à* M. *L'indice* $_{[1]}$ *dénote le terme localisé aux unités.*

Ce cocycle s'envoie également au niveau du symbole principal $C^\infty(S_H^*M) \rtimes G$ en utilisant l'extension

$$0 \longrightarrow \Psi_{H,c}^{-1}(M) \rtimes G \longrightarrow \Psi_{H,c}^{0}(M) \rtimes G \longrightarrow C_c^\infty(S_H^*M) \rtimes G \longrightarrow 0,$$

que l'on peut facilement comparer à l'extension précédente. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au corps de la thèse. Le résultat principal est la "réalisation géométrique" du cocycle de Radul équivariant. Pour simplifier l'énoncé du théorème pour l'introduction, nous identifions $\partial[\mathrm{Tr}_{[1]}]$ à l'élément de $HP^1(C_c^\infty(S_H^*M) \rtimes G)$ correspondant.

THEORÈME VI. (THEOREM 3.33) *Soit* M *une variété feuilletée et* G *un groupe discret de difféomorphismes feuilletés. Notons* EG *le fibré universel sur l'espace classifiant* BG *de* G. *Soit*

$$0 \longrightarrow \Psi_{H,c}^{-1}(M) \rtimes G \longrightarrow \Psi_{H,c}^{0}(M) \rtimes G \longrightarrow C_c^\infty(S_H^*M) \rtimes G \longrightarrow 0$$

l'extension pseudodifférentielle associée au calcul de Heisenberg équivariant. Alors l'image de la trace canonique localisée à l'unité $\partial[\mathrm{Tr}_{[1]}] \in HP^0(\Psi_{H,c}^{-1}(M) \rtimes G)$ *par la flèche d'excision* ∂ *est donnée par*

$$\partial([\tau]) = \Phi(\pi^*\mathrm{Td}(TM \otimes \mathbb{C}))$$

où $\Phi : H^{ev}(EG \times_G S_H^*M) \to HP^1(C_c^\infty(S_H^*M) \rtimes G)$ *est l'application caractéristique de Connes de la cohomologie équivariante vers la cohomologie cyclique,* $\mathrm{Td}(TM \otimes \mathbb{C})$ *est la classe de Todd équivariante du fibré tangent complexifié de* M *et* $\pi : S_H^*M \times_G EG \to M \times_G EG$ *la projection canonique.*

Pour établir ce résultat, l'idée est d'expliciter une homotopie entre le cocycle de Radul et celui du théorème précédent. Dans le cadre de la cohomologie cyclique, une recette pour obtenir automatiquement des cochaines qui transgressent deux représentants d'une même classe de cohomologie est d'utiliser une *formule JLO*. Une première observation (déjà soulevée dans les précédents chapitres) est que nos cocycles sont définis, non pas sur des algèbres de fonctions comme dans le cadre de la formule JLO usuelle, mais sur des algèbres d'opérateurs pseudodifférentiels. Il faut ainsi établir un cadre adéquat, qu'on peut voir par les points suivants :

(1) Des opérateurs agissant sur les symboles (qui en un sens, remplacent l'espace de Hilbert dans le contexte original de la formule JLO, les modules de Fredholm ...),
(2) Une notion de "noyau de la chaleur" (plus précisément, d'un "laplacien sur les symboles")
(3) Une trace sur ces opérateurs,
(4) Une notion "d'opérateur de Dirac", dans le sens où pour $a \in \mathcal{S}_{H,c}(M)$, $[D, a]$ redonne la différentielle da du symbole a (à quelques détails près),
(5) Disposer d'une méthode de calcul (dans le cas classique, on a la formule de Mehler et le Getzler rescaling).
(6) Adaptation au cas équivariant.

On trouve une réponse générale à ces différents points en adaptant le formalisme développé par Perrot dans [36] et [37] au calcul de Heisenberg. Ce formalisme est une version globalisée de celui développé dans le cas plat au Chapitre 2 : par exemple, l'opérateur F est un opérateur de Dirac dans le cas plat. Nous essaierons au travers de diverses remarques de faire ressortir les analogies avec le Chapitre 2 qui pourraient faciliter la lecture. Les constructions ne sont pas aisées mais relativement flexibles car l'utilisation des résidus les rend purement algébriques. On peut aussi traiter le cas d'opérateurs n'étant pas nécessairement de type Dirac. En particulier, notons cette méthode fonctionne lorsque le Getzler rescaling ne s'applique plus. Notons toutefois que l'opérateur de Dirac construit n'est qu'un intermédiaire, contrairement au contexte JLO classique, où il est l'objet d'étude principal. Un autre ingrédient crucial du formalisme de Perrot est d'être *invariant par difféomorphismes*.

Une fois ces étapes achevées, on calcule le cocycle JLO pour deux opérateurs de Dirac différents adéquats, le premier donnant le cocycle de Radul associé à l'extension pseudodifférentielle, le second donnant le dual de Poincaré de la classe de Todd équivariante. Les arguments d'homotopie usuels du formalisme JLO s'adaptent mot à mot à ce cadre, donnant ainsi le théorème.

En corollaire, on obtient la solution au problème de l'indice de l'opérateur de signature transverse. Cela vient en combinant le lien entre le cocycle de Radul et le caractère de Chern-Connes établi au Chapitre 1, avec le théorème précédent. On garde les mêmes notations qu'au Théorème VI.

THEORÈME VII. (THEOREM 3.34) *Soit* G *un groupe discret agissant par des difféomorphismes préservant l'orientation sur une variété* M. *Soit* P *le fibré des métriques sur* M *et* $\mathcal{A} = C_c^\infty(P) \rtimes G$. *Si l'action de* G *n'a pas de points fixes, alors le caractère de Chern du module de Fredholm* (H, F) *associé à l'opérateur de signature hypoelliptique de Connes et Moscovici est*

$$\mathrm{ch}(H, F) = \pi_* \circ \Phi(L'(M)) \in HP^1(\mathcal{A}) ,$$

où $L'(M)$ *est le* L*-genus modifié de Hirzebruch.*

Plan du chapitre. La Section 1 donne des rappels sur le X-complexe développé par Cuntz et Quillen pour la cohomologie cyclique.

La Section 2 calcule la flèche d'excision associée à l'extension pseudodifférentielle équivariante et établit le Théorème VI.

Les Sections 3, 4, 5 permettent de réaliser les étapes (1), (2), (3) et (4) évoquées plus haut afin de construire une formule JLO algébrique sur les symboles.

La Section 6 introduit les objets nécessaires pour se placer dans le cadre équivariant. On rappelle en particulier certaines notions liées à la cohomologie équivariante, qui seront nécessaires pour construire l'application caractéristique de Connes de la cohomologie équivariante $H^\bullet(M \times_G EG)$ vers la cohomologie cyclique périodique du produit croisé $HP^\bullet(C^\infty(M) \rtimes G)$. C'est à ce moment que le X-complexe intervient.

La Section 7 établit la formule JLO, permettant ainsi d'établir le Théorème VI.

La Section 8 montre comment obtenir le Théorème VII à partir du Théorème VI.

3.4. Chapitre 4. Discussion sur les variétés coniques. Cette section est une discussion de l'application de la théorie des triplets spectraux réguliers aux variétés à singularités coniques (isolées). La motivation pour ce travail était de trouver un exemple d'application du Chapitre 1 dans des cas où les fonctions zêta exhibent des pôles multiples. Les premiers travaux dans cette direction sont dûs à Lescure [28], qui construit de tels triplets spectraux. Néanmoins, l'algèbre considérée dans le triplet est celle des fonctions dont toutes les dérivées s'annulent au voisinage de la singularité conique, avec une unité adjointe. Ainsi, beaucoup d'informations géométriques sont perdues, par exemple l'algèbre des opérateurs différentiels abstraits ne contient pas tous les opérateurs différentiels de type Fuchs, qui sont les opérateurs adaptés aux variétés coniques. Il est ainsi naturel de se demander si l'on peut raffiner le choix de l'algèbre. Malheureusement, nous verrons que les propriétés analytiques de la fonction zêta obtenue dans ce contexte fournit une obstruction à faire mieux, et que la régularité du triplet spectral impose précisément d'éliminer la singularité comme le fait Lescure. Cependant, cet exemple donne une bonne idée des phénomènes qui apparaissent lorsque la régularité du triplet spectral est perdue. Le cocycle de Radul généralisé du Chapitre 1 et les formules d'indice ne sont plus locaux, car les termes usuellement tués par les résidus contribuent au cocycle. Nous renvoyons le lecteur au chapitre concerné pour les différentes notations.

THEORÈME VIII. (THEOREM 4.14) *Soit* M *une variété conique, et* $r : M \to \mathbb{R}_+$ *une fonction de bord. Soit* Δ *le laplacien conique de l'Exemple 4.11. Alors le cocycle de Radul associé à l'extension pseudodifférentielle du* b*-calcul de Melrose :*

$$0 \longrightarrow r^\infty\Psi_b^{-\infty}(M) \longrightarrow r^{-\mathbb{Z}}\Psi_b^{\mathbb{Z}}(M) \longrightarrow r^{-\mathbb{Z}}\Psi_b^{\mathbb{Z}}(M)/r^\infty\Psi_b^{-\infty}(M) \longrightarrow 0$$

est donné par la formule non-locale *suivante :*

$$c(a_0, a_1) = (\mathrm{Tr}_{\partial,\sigma} + \mathrm{Tr}_\sigma)(a_0[\log\Delta, a_1]) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_{\partial,\sigma}(a_0[\log\Delta, [\log\Delta, a_1]])+$$
$$+ \mathrm{Tr}_\partial\left(a_0\sum_{k=1}^{N} a_1^{(k)}\Delta^{-k}\right) + \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\mathrm{Tr}\left(\int \lambda^{-z}a_0(\lambda-\Delta)^{-1}a_1^{(N+1)}(\lambda-\Delta)^{-N-1}\right)d\lambda$$

pour $a_0, a_1 \in \Psi_b^{\mathbb{Z}}(M)/r^\infty\Psi_b^{-\infty}(M)$ *et* N *assez large.*

Tr_σ est l'extension à M du résidu de Wodzicki sur l'intérieur de M. $\mathrm{Tr}_{\partial,\sigma}$ mesure son défaut à être une trace sur $r^{-\mathbb{Z}}\Psi_b^{\mathbb{Z}}(M)$. Ces deux termes sont donnés par une formule locale. La seconde ligne de la formule désigne la partie non-locale : Tr_∂ est ce qui est plus communément appelé la b-trace, qui est obtenue comme une partie finie de la trace usuelle sur les opérateurs régularisants, et la partie intégrale, qui pour les triplets spectraux réguliers s'annule sous les résidus, contribue dans notre cas au cocycle.

Cette approche donne un autre point de vue que celui donné par l'invariant êta, et ne fonctionne pas seulement pour les opérateurs de Dirac mais aussi pour les opérateurs pseudodifférentiels. Il pourrait être intéressant de comprendre quels sont les liens entre la partie non-locale du cocycle avec l'invariant êta.

Plan du chapitre. Les Sections 1, 2 et 3 rappellent le b-calcul de Melrose, les notions de résidus et les développements du noyau de la chaleur dans ce contexte.

La Section 4 explique pourquoi la fonction zêta conique fournit une obstruction à définir un triplet spectral régulier plus fin que celui construit par Lescure.

La Section 5 explique le Théorème VIII.

Chapitre 1

Local index formula for abstract elliptic operators

In this chapter, we establish a general local index formula for "abstract elliptic operators", using the framework of abstract (pseudo)differential operators developed by Higson [22] and Uuye [45]. The formula is derived from a cyclic 1-cocycle obtained as a residue of certain zeta functions, in the spirit of the residue formula of Connes and Moscovici, but is defined directly on pseudodifferential operators rather than on smooth functions. The construction uses mainly zeta functions renormalization techniques and the excision property in periodic cyclic cohomology.

1. Abstract differential operators and traces

In this part, we recall the Abstract Differential Operators formalism developed by Higson in [22]. For details, the reader may refer to his paper and also [45].

1.1. Abstract differential operators. Let H be a (complex) Hilbert space and Δ be a unbounded, positive and self-adjoint operator acting on it. We denote by H^∞ the intersection :

$$H^\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathrm{dom}(\Delta^k).$$

DEFINITION 1.1. An algebra $\mathcal{D}(\Delta)$ of *abstract differential operators* associated to Δ is an algebra of operators on H^∞ fulfilling the following conditions

(i) The algebra $\mathcal{D}(\Delta)$ is filtered,

$$\mathcal{D}(\Delta) = \bigcup_{q \geqslant 0} \mathcal{D}_q(\Delta)$$

that is $\mathcal{D}_p(\Delta) \cdot \mathcal{D}_q(\Delta) \subset \mathcal{D}_{p+q}(\Delta)$. We shall say that an element $X \in \mathcal{D}_q(\Delta)$ is an *abstract differential operator of order at most* q. The term *differential order* will be often used for the order of such operators.

(ii) There is a $r > 0$ ("the order of Δ") such that for every $X \in \mathcal{D}_q(\Delta)$, $[\Delta, X] \in \mathcal{D}_{r+q-1}(\Delta)$.

To state the last point, we define, for $s \in \mathbb{R}$, the s-*Sobolev space* H^s as the subspace $\mathrm{dom}(\Delta^{s/r})$ of H, which is a Hilbert space when endowed with the norm

$$\|v\|_s = (\|v\|^2 + \|\Delta^{s/r} v\|^2)^{1/2}$$

(iii) *Elliptic estimate.* If $X \in \mathcal{D}_q(\Delta)$, then, there is a constant $\varepsilon > 0$ such that

$$\|v\|_q + \|v\| \geqslant \varepsilon \|Xv\| \, , \, \forall v \in H^\infty$$

Having Gärding's inequality in mind, the elliptic estimate exactly says that $\Delta^{1/r}$ should be thought as an "abstract elliptic operator" of order 1. It also says that any differential operator X of order q can be extended to a bounded operator form H^{s+q} to H^s. This last property will be useful to define pseudodifferential calculus in this setting.

EXAMPLE 1.2.

(i) The first example is the classical case where Δ is a Laplace type operator on a Riemannian manifold M. Here, $r = 2$ and $\mathcal{D}(\Delta)$ is simply the algebra of compactly supported differential operators, the H^s are the usual Sobolev space and we have an elliptic estimate. In fact, the definition above is exactly an abstraction of this example.

(ii) The second example on which most of the thesis focuses on is the one concerning foliations. Let M be a foliated manifold. Then, we take for $\mathcal{D}(\Delta)$ the algebra of differential operators on M, *endowed with the Heisenberg order* recalled in Introduction, Section 2.4. The operator Δ is here the sub-elliptic sub-laplacian of Example 19 and $r = 4$. Concerning the elliptic estimatie, the usual elliptic regularity may be adapted to this setting by introducing the appropriate notion of Sobolev space. The interested reader should consult [**21**] for details.

1.2. Correspondence with spectral triples. Let $(\mathcal{A}, H, D)$ be a spectral triple (Introduction, Section 2.3). One may construct a algebra of abstract differential operators $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{A}, D)$ inductively as follows :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_0 &= \text{algebra generated by } \mathcal{A} \text{ and } [D, \mathcal{A}] \\
\mathcal{D}_1 &= [\Delta, \mathcal{D}_0] + \mathcal{D}_0[\Delta, \mathcal{D}_0] \\
&\ \vdots \\
\mathcal{D}_k &= \sum_{j=1}^{k-1} \mathcal{D}_j \cdot \mathcal{D}_{k-j} + [\Delta, \mathcal{D}_{k-1}] + \mathcal{D}_0[\Delta, \mathcal{D}_{k-1}]
\end{aligned}$$

Let δ be the unbounded derivation $\mathrm{ad}\,|D| = [|D|, .]$ acting on $\mathcal{B}(H)$. The spectral triple is $(\mathcal{A}, H, D)$ is said *regular* if $\mathcal{A}, [D, \mathcal{A}]$ are included in $\bigcap_{n \geqslant 1} \mathrm{dom}\,\delta^n$. The following theorem of Higson relates algebras of abstract differential operators and spectral triples.

THEOREM 1.3. (Higson, [**22**]) *Suppose $\mathcal{A}$ maps H^∞ into itself. Then, the spectral triple $(\mathcal{A}, H, D)$ is regular if and only if the elliptic estimate of Definition 1.1 holds.*

Regularity in spectral triples may be viewed as an assumption allowing to control asymptotic expansion of "pseudodifferential operators", as we shall see in the next paragraph from the perspective of the elliptic estimate.

1.3. Zeta Functions. Let $\mathcal{D}(\Delta)$ be an algebra of abstract differential operators. We shall suppose that there exists a $d \geqslant 0$ such that for every $X \in \mathcal{D}_q(\Delta)$, the operator $X\Delta^{-z}$ extends to a trace-class operator on H for z on the half-plane $\mathrm{Re}(z) > \frac{q+d}{r}$. The *zeta function* of X is

$$\zeta_X(z) = \mathrm{Tr}(X\Delta^{-z/r})$$

where the complex powers Δ^z are defined as in (7).

The smallest d verifying the above property is called the *analytic dimension* of $\mathcal{D}(\Delta)$. In this case, the zeta function is holomorphic on the half-plane $\mathrm{Re}(z) > q + d$. We shall say that $\mathcal{D}(\Delta)$ has the *analytic continuation property* if for every $X \in \mathcal{D}(\Delta)$, the associated zeta function extends to a meromorphic function of the whole complex plane.

As already recalled in Introduction, Section 2.3, these notions come from properties of the zeta function on a closed Riemannian manifold M : the algebra of differential operators on M has analytic dimension $\dim M$ and the analytic continuation property, giving back a topological data. Its extension to a meromorphic function has at most simple poles at the integers smaller than $\dim M$. In the case where M is foliated and working with the Heisenberg calculus, the dimension of the leaves appears in the analytic dimension. Therefore, the zeta function may also provide geometric informations.

1.4. Abstract Pseudodifferential Operators. Let $\mathcal{D}(\Delta)$ an algebra of abstract differential operators of analytic dimension d. To define the notion of pseudodifferential operators, we need a more general notion of order, not necessary integral, which covers the one induced by the filtration of $\mathcal{D}(\Delta)$.

DEFINITION 1.4. An operator $T : H^\infty \to H^\infty$ is said to have *pseudodifferential order* $m \in \mathbb{R}$ if for every $s \geqslant 0$, it extends to a bounded operator from H^{m+s} to H^s. In addition, remark that operators of analytic order stricly less than $-d$ are trace-class operators.

That this notion of order covers the differential order is due to the elliptic estimate, as already remarked in Section 1.1. The space of such operators, denoted $\mathrm{Op}(\Delta)$, forms a $\mathbb{R}$-filtered algebra. There is also a notion of regularizing operators which are, as expected, the elements of the (two-sided) ideal of operators of all order.

REMARK 1.5. Higson uses in [22] the term "analytic order", but as the examples we deal with in the paper are about pseudodifferential operators, we prefer the term pseudodifferential order.

EXAMPLE 1.6. For every $\lambda \in \mathbb{C}$ not contained in the spectrum of Δ, the resolvent $(\lambda - \Delta)^{-1}$ has analytic order r. Moreover, by spectral theory, its norm as an operator between Sobolev spaces is a $O(|\lambda|^{-1})$.

The following notion is due to Uuye, cf. [45]. We just added an assumption on the zeta function which is necessary for what we do.

DEFINITION 1.7. An algebra of abstract pseudodifferential operators is a $\mathbb{R}$-filtered subalgebra $\Psi(\Delta)$ of $\mathrm{Op}(\Delta)$, also denoted Ψ when the context is clear, satisfying

$$\Delta^{z/r}\Psi^m \subset \Psi^{\mathrm{Re}(z)+m}, \quad \Psi^m\Delta^{z/r} \subset \Psi^{\mathrm{Re}(z)+m}$$

and which commutes, up to operators of lower order, with the complex powers of $\Delta^{1/r}$, that is , for all $m \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$

$$[\Delta^{z/r}, \Psi^m] \subset \Psi^{\mathrm{Re}(z)+m-1}$$

Moreover, we suppose that for every $P \in \Psi^m(\Delta)$, the zeta function

$$\zeta_P(z) = \mathrm{Tr}(P\Delta^{-z/r})$$

is holomorphic on the half-plane $\mathrm{Re}(z) > m + d$, and extends to a meromorphic function of the whole complex plane. We shall denote by

$$\Psi^{-\infty} = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} \Psi^m$$

EXAMPLE 1.8.

(i) The algebra of (classical) pseudodifferential operators $\Psi_{cl,c}(M)$ on a manifold M is an abstract algebra of pseudodifferential operators.
(ii) Assume that M is foliated. Then, the algebra $\Psi_{H,c}(M)$ of classical Heisenberg pseudo- differential operators (cf. Section 2.4) is also an abstract algebra of pseudodifferential operators.

We end this part with a notion of asymptotic expansion for abstract pseudodifferential operators. This can be seen as "convergence under the residue".

DEFINITION 1.9. Let T and T_α (α in a set A) be operators on Ψ. We shall write

$$T \sim \sum_{\alpha \in A} T_\alpha$$

if there exists $c > 0$ and a finite subset $F \subset A$ such that for all finite set $F' \subset A$ containing F, the map

$$z \longmapsto \mathrm{Tr}\left((T - \sum_{\alpha \in F'} T_\alpha) \Delta^{z/r} \right)$$

is holomorphic in a half-plane $\mathrm{Re}(z) > -c$ (which contains $z = 0$).

EXAMPLE 1.10. Suppose that for every $M > 0$, there exists a finite subset $F \subset A$ such that

$$T - \sum_{\alpha \in F} T_\alpha \in \Psi^{-M}$$

Then, $T \sim \sum_{\alpha \in A} T_\alpha$

In this context, asymptotic means that when taking values under the residue, such infinite sums, which have no reason to converge in the operator norm, are in fact finite sums. Thus, this will allow us to disregard analytic subtleties and to consider these sums only as formal expansions without wondering if they converge or not. In other words, this notion allows to adopt a completely algebraic viewpoint. To this effect, the following lemma is crucial.

LEMMA 1.11. (Connes-Moscovici's trick, [11, 22]) *Let $Q \in \Psi(\Delta)$ be an abstract pseudodifferential operator. Then, for any $z \in \mathbb{C}$, we have*

$$[\Delta^{-z}, Q] \sim \sum_{k \geqslant 1} \binom{-z}{k} Q^{(k)} \Delta^{-z-k}$$

where we denote $Q^{(k)} = \mathrm{ad}(\Delta)^k(Q)$, $\mathrm{ad}(\Delta) = [\Delta, .]$.

TWO IMPORTANT FACTS. Firstly, remark that the pseudodifferential order of terms in the sum are decreasing to $-\infty$, so that the difference between $[\Delta^{-z}, Q]$ and the sum becomes more and more regularizing as the number of terms grows.

Secondly, and more importantly, this is essentially the elliptic estimate, or the regularity of the spectral triple, which implies this formula. Then, if the sum in the lemma above is not asymptotic in the sense defined, the elliptic estimate cannot hold. In terms of spectral triple, this means it is not regular. Chapter 4 discusses an example where this phenomena occurs.

PROOF. For $z \in \mathbb{C}$ such that $\mathrm{Re}(z)$ is large enough, one proves, using Cauchy formulas and reasoning by induction, that the following identity holds (cf [22], Lemma 4.20) :

$$\Delta^{-z} Q - Q \Delta^{-z} = \sum_{k=1}^{N} \binom{-z}{k} Q^{(k)} \Delta^{-z-k} + \frac{1}{2\pi i} \int \lambda^{-z} (\lambda - \Delta)^{-1} Q^{(N+1)} (\lambda - \Delta)^{-N-1} \, d\lambda \tag{1.1}$$

By the elliptic estimate, the integral term in the right hand-side has pseudodifferential order $\mathrm{ord}Q + (N+1)r - N - 1 - (N+2)r = \mathrm{ord}(Q) - r - N - 1$, which can therefore be made as small as we want to by taking N large. This proves the lemma in the case where $\mathrm{Re}(z) > 0$. The general case follows from the analytic continuation property. □

1.5. Higher traces on the algebra of abstract pseudodifferential operators. We give in this paragraph a simple generalization of the Wodzicki residue trace, when the zeta function of the algebra $\mathcal{D}(\Delta)$ has poles of arbitrary order. Actually, this was already noticed by Connes and Moscovici (see [11]).

PROPOSITION 1.12. *Let $\Psi(\Delta)$ an algebra of abstract pseudodifferential operators, following the context of the previous paragraphs. Suppose that the associated zeta function has a pole of order $p \geqslant 1$ in 0. Then, the* *functional*

$$\int\!\!\!\!-^{p} P = \mathrm{Res}_{z=0} z^{p-1} \mathrm{Tr}(P\Delta^{-z/r})$$

defines a trace on $\Psi(\Delta)$.

PROOF. Let $P, Q \in \Psi(\Delta)$. Then, for $\mathrm{Re}(z) \gg 0$, we can use the trace property on commutators to write :

$$\mathrm{Tr}([P,Q]\Delta^{-z/r}) = \mathrm{Tr}(P(Q - \Delta^{-z/r}Q\Delta^{z/r})\Delta^{-z/r})$$

Using the analytic continuation property, we have

$$\int\!\!\!\!-^{p} [P,Q] = \mathrm{Res}_{z=0} z^{p-1} \mathrm{Tr}(P(Q - \Delta^{-z/r}Q\Delta^{z/r})\Delta^{-z/r})$$

By Lemma 1.11,

$$\Delta^{-z/r}Q - Q\Delta^{-z/r} \sim \sum_{k\geqslant 1} \binom{-z/r}{k} Q^{(k)}\Delta^{-k}\cdot\Delta^{-z/r}$$

so that,

$$\int\!\!\!\!-^{p} [P,Q] = \mathrm{Res}_{z=0} \sum_{k\geqslant 1} z^{p-1} \mathrm{Tr}\left(\binom{-z/r}{k} Q^{(k)}\Delta^{-k}\cdot\Delta^{-z/r}\right)$$

The sum is finite : Indeed, the order of $Q^{(k)}\Delta^{-k}$ is $\mathrm{ord}(Q)-k$, so the terms in the sum above become holomorphic at $z = 0$ when k is large enough, and vanish when taking values under the residue. Finally, the finite sum remaining vanishes since the zeta function has at most a pole of order p at 0. □

If $0 \leqslant k < p$, then $\int\!\!\!\!-^{k}$ is no more a trace in general, but one has an explicit relation expressing the commutators, cf. [11].

2. The Radul cocycle for abstract pseudodifferential operators

We can finally come to the first theorem of the thesis. Let $\mathcal{D}(\Delta)$ be an algebra of abstract differential operators and $\Psi = \Psi(\Delta)$ be an algebra of abstract pseudodifferential operators. We consider the extension

$$0 \longrightarrow \Psi^{-\infty} \longrightarrow \Psi \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

where $\mathcal{S}$ is the quotient $\Psi/\Psi^{-\infty}$. The operator trace on $\Psi^{-\infty}$ is well defined, and defines a periodic cyclic cohomology class $[\mathrm{Tr}] \in HP^0(\Psi^{-\infty})$. It also satisfies $\mathrm{Tr}([\Psi^{-\infty},\Psi]) = 0$. In addition, let $\partial : HP^0(\Psi^{-\infty}) \to HP^1(\mathcal{S})$ denote the excision map in periodic cyclic cohomology associated to the above extension.

THEOREM 1.13. *Suppose that the pole at zero of the zeta function is of order* $p \geqslant 1$. *Then, the class* $\partial[\mathrm{Tr}] \in HP^1(S)$ *is represented by the following cyclic 1-cocycle :*

$$c(a_0,a_1) = \int\!\!\!\!-^{1} a_0\delta(a_1) - \frac{1}{2!}\int\!\!\!\!-^{2} a_0\delta^2(a_1) + \ldots + \frac{(-1)^{p-1}}{p!}\int\!\!\!\!-^{p} a_0\delta^p(a_1)$$

where $\delta(a) = [\log\Delta^{1/r}, a]$ *and* $\delta^k(a) = \delta^{k-1}(\delta(a))$ *is defined by induction. We shall call this cocycle the* (generalized) Radul cocycle*.*

Here, the commutator $[\log \Delta^{1/r}, a]$ is defined as the non-convergent asymptotic expansion

$$[\log \Delta^{1/r}, a] \sim \frac{1}{r} \sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} a^{(k)} \Delta^{-k} \tag{1.3}$$

where $a^{(k)}$ has the same meaning as in Lemma 1.11. This expansion arises by first using functional calculus :

$$\log \Delta^{1/r} = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int \log \lambda^{1/r} (\lambda - \Delta)^{-1} \, d\lambda$$

and then, reproducing the same calculations as those made in the proof of Lemma 1.11 to obtain the formula. In particular, note the equality $\log \Delta^{1/r} = \frac{1}{r} \log \Delta$.

Another equivalent and useful expansion possible is the following

$$[\log \Delta^{1/r}, a] \sim \sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} a^{[k]} \Delta^{-k/r} \tag{1.4}$$

where $a^{[1]} = [\Delta^{1/r}, a]$, and $a^{[k+1]} = [\Delta^{1/r}, a^{[k]}]$.

Before giving the proof of the result, let us give a heuristic explanation of how to get this formula. We proceed as in Example 26. To this end, we first lift the trace on $\Psi^{-\infty}$ to a linear map τ_R on Ψ using a zeta function regularization by "Partie Finie" :

$$\tau_R(P) = \mathrm{Pf}_{z=0} \mathrm{Tr}(P \Delta^{-z/r})$$

for any $P \in \Psi$. The "Partie Finie" Pf is defined as the constant term in the Laurent expansion of a meromorphic function. Let $Q \in \Psi$ be another pseudodifferential operator. Then, we have

$$\mathrm{Pf}_{z=0} \mathrm{Tr}([P, Q] \Delta^{-z/r}) = \mathrm{Res}_{z=0} \mathrm{Tr} \left(P \cdot \frac{Q - \Delta^{-z/r} Q \Delta^{z/r}}{z} \Delta^{-z/r} \right)$$

by reasoning first for $z \in \mathbb{C}$ of sufficiently large real part to use the trace property, and then applying the analytic continuation property.

Then, informally we can think of the complex powers of Δ as

$$\Delta^{z/r} = e^{\log \Delta \cdot z/r} = 1 + \frac{z}{r} \log \Delta + \ldots + \frac{1}{p!} \left(\frac{z}{r} \right)^p (\log \Delta)^p + O(z^{p+1})$$

which after some calculations, gives the expansion

$$(Q - \Delta^{-z/r} Q \Delta^{z/r}) \Delta^{-z/r} = z \delta(Q) - \frac{z^2}{2} \delta^2(Q) + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{z^p}{p!} \delta^p(Q) + O(z^{p+1})$$

Proof. Let $P, Q \in \Psi$ be two abstract pseudodifferential operators. The beginning of the proof is the same as the heuristic argument given above, so we start from the equality

$$\begin{aligned} \mathrm{Pf}_{z=0} \mathrm{Tr}([P, Q] \Delta^{-z/r}) &= \mathrm{Res}_{z=0} \mathrm{Tr} \left(P \cdot \frac{Q - \Delta^{-z/r} Q \Delta^{z/r}}{z} \Delta^{-z/r} \right) \\ &= \mathrm{Res}_{z=0} \mathrm{Tr} \left(P \cdot \frac{1}{z} \sum_{k \geqslant 1} \binom{-z/r}{k} Q^{(k)} \Delta^{-k} \cdot \Delta^{-z/r} \right) \end{aligned}$$

The second equality comes from Lemma 1.11.

Then, let X be an indeterminate. As power series over the complex numbers with indeterminate X, we remark that for any $z \in \mathbb{C}$, one has

$$\frac{1}{z} \sum_{k \geqslant 1} \binom{-z/r}{k} X^k = \frac{1}{z} ((1 + X)^{-z/r} - 1)$$

On the other hand, we have, for $q \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{ad}(\log \Delta^{1/r})^q(Q) = \frac{1}{r^q}\left[\log \Delta, [..., [\log \Delta, Q]]\right] \sim \frac{1}{r^q} \sum_{k \geqslant q} \sum_{k_1+...+k_q=k} \frac{(-1)^{k-q}}{k_1 \dots k_q} Q^{(k)} \Delta^{-k}$$

Using once more the indeterminate X, one has

$$\sum_{k \geqslant q} \sum_{k_1+...+k_q=k} \frac{(-1)^{k-q}}{k_1 \dots k_q} X^k = \left(\sum_{l \geqslant 1} \frac{(-1)^{l-1} X^l}{l} \right)^q = \log(1+X)^q$$

thus obtaining

$$\sum_{q \geqslant 1} \frac{(-1)^{q-1}}{q!} \frac{z^{q-1}}{r^q} \log(1+X)^q = \frac{1}{z}((1+X)^{-z/r} - 1)$$

This proves that the coefficients of $Q^{(k)}\Delta^{-k}$ in the sums

$$\frac{1}{z} \sum_{k \geqslant 1} \binom{-z}{k} Q^{(k)} \Delta^{-k}, \qquad \sum_{q \geqslant 1} \frac{(-1)^{q-1}}{q!} \frac{z^{q-1}}{r^q} \left(\sum_{k \geqslant q} \sum_{k_1+...+k_q=k} \frac{(-1)^{k-q}}{k_1 \dots k_q} Q^{(k)} \Delta^{-k} \right)$$

are the same, hence the result follows. □

EXAMPLE 1.14. Let us recall the original Radul cocycle [41], introduced in the context of Lie algebra cohomology. Let M be a Riemannian manifold, Δ be a Laplacian on M and $\Psi = \Psi_{\mathrm{cl},c}(M)$ be the algebra of classical pseudodifferential operators on M with compact support, $\Psi^{-\infty} = \Psi_c^{-\infty}(M)$ the ideal of regularizing operators with compact support. The quotient $\Psi/\Psi^{-\infty}$ is the algebra $\mathcal{S}_{\mathrm{cl},c}(M)$ of compactly supported formal symbols. A trace on $\Psi_c^{-\infty}(M)$ is given by

$$\tau(K) = \operatorname{Tr}(K) = \int_M k(x,x) d\mathrm{vol}(x) \tag{1.5}$$

where k is the Schwartz kernel of K. Applying Theorem 1.13 and the Wodzicki residue (8) shows that $\partial[\tau]$ is represented by the following cyclic 1-cocycle on $\mathcal{S}_{\mathrm{cl},c}(M)$:

$$c(a_0, a_1) = ⨍ a_0[\log \Delta^{1/2}, a_1] \tag{1.6}$$

The discussion we will have in Example 1.15 for the foliated setting also applies verbatim here, so we report the reader there for comments.

Let us just mention a recent result of Perrot when M is closed, who shows in [36] that under the isomorphism

$$H_\bullet(S^*M, \mathbb{C}) \longrightarrow HP^\bullet(C^\infty(S^*M))$$

where S^*M is the cosphere bundle of M, the periodic cyclic cohomology class of the Radul cocycle is exactly the Poincaré dual of the Todd class of the complexified tangent bundle $TM \otimes \mathbb{C}$ (more precisely its pull-back by the projection $S^*M \to M$). We shall extend these techniques in Chapter 3.

EXAMPLE 1.15. Let M be a foliated manifold. In this setting, all the subscripts $_{\mathrm{cl}}$ in the previous example are replaced by the subscript $_H$, working with the Heisenberg calculus. The operator Δ will be the sub-elliptic sub-laplacian of Example 19. Then, using the Connes-Moscovici residue from Theorem 21 and applying Theorem 1.13 to the trace τ previously defined, $\partial[\tau]$ is represented by the following cyclic 1-cocycle on $\mathcal{S}_{H,c}(M)$:

$$c(a_0, a_1) = ⨍ a_0[\log |\xi|', a_1] \tag{1.7}$$

With a slight abuse of notation, we denote by $\log|\xi|'$ the symbol of $\Delta^{1/4}$. We emphasize that the product of symbols is the star-product defined in (11), but we omit the notation $\star$. Therefore, we observe that we may apply exactly the same arguments as above.

Remark that $\log|\xi|'$ is a log-polyhomogeneous (Heisenberg) symbol and is not classical. But using (1.4), it is clear that its commutator with any element of $\mathcal{S}_{H,c}(M)$ is.

From this cocycle, we then get an index formula for H-elliptic operators. Indeed, if P is such an operator of formal symbol $u \in \mathcal{S}_{H,c}(M)$, and Q a parametrix of P in the Heisenberg calculus, of formal symbol $u^{-1} \in \mathcal{S}_{H,c}(M)$, then, the Fredholm index of P is given by

$$\mathrm{Ind}(P) = c(u^{-1}, u)$$

As we can see, the Radul cocycle is given by the Connes-Moscovici residue, and is local. However, it seems to be an unattainable task (except maybe in low dimensions) to get an index formula in terms of the principal symbol only since by (12), we have to find the symbol of order $-(p+2q)$ of $u^{-1}[\log|\xi|', u]$. At first sight, many terms of the formal expansions of u and u^{-1}, as well as many of their higher derivatives, seem to be involved. We shall see in the two next chapters how to overcome this difficulty.

EXAMPLE 1.16. As a more concrete example, let us see how to recover the Noether index theorem from a low dimensional case. Let $M = S^1$ be the unit circle. Consider the operators $D = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}$, $F = D|D|^{-1}$ and $P = \frac{1+F}{2}$ acting on the Hardy space $H^2(S^1)$. The cosphere bundle of S^1 is $S^*S^1 = S^1 \times \{1\} \cup S^1 \times \{-1\}$. Then, remark that P is a pseudodifferential operator of order 0, its symbol defined on T^*S^1 is $\sigma_F(t,\xi) = \frac{1+\xi|\xi|^{-1}}{2}$, where $|.|$ denotes the euclidian norm.

Then, let $u \in C^\infty(S^1)$ be a nowhere vanishing smooth function. We extend the associated Toeplitz operator PuP to $L^2(S^1)$ by considering the operator $T_u = PuP - (1-P)$, which is an elliptic pseudodifferential of order 0 of symbol given by

$$\begin{cases} u(t) & \text{on } S^1 \times (0,\infty) \\ 1 & \text{on } S^1 \times (-\infty, 0) \end{cases}$$

Then, using the star-product formula (11), one sees that the part of order -1 in the symbol of $T_{u^{-1}}[\log D, T_u]$ is

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mathbf{i}\xi}\dfrac{u'(t)}{u(t)} & \text{on } S^1 \times (0,\infty) \\ 0 & \text{on } S^1 \times (-\infty, 0) \end{cases}$$

Thus, combining Formula (9) with the conclusion of the previous example yields Noether's formula :

$$\mathrm{Ind}(T_u) = -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{S^1} u^{-1}\,du$$

3. Relation with the Chern-Connes character

In this section, we recover the Chern-Connes character of a finitely summable Fredholm module from a pull-back of the Radul cocycle we previously built.

Let $(\mathcal{A}, H, F)$ be a (trivially graded) p-summable Fredholm module. In addition, let $\Psi = \Psi(\Delta)$ be an abstract algebra of pseudodifferential operators, such that

(1) Ψ^0 is an algebra of bounded operators on H containing the representation of $\mathcal{A}$,

(2) Ψ^{-1} is a two-sided ideal consisting of p-summable operators on H,

(3) F is a multiplier of Ψ^0 and $[F, \Psi^0] \subset \Psi^{-1}$.

We have an abstract principal symbol exact sequence,

$$0 \longrightarrow \Psi^{-1} \longrightarrow \Psi^0 \longrightarrow \Psi^0/\Psi^{-1} \longrightarrow 0 \tag{1.8}$$

Ψ^0/Ψ^{-1} should be viewed as an "abstract cosphere bundle". This extension is related to the one involving regularizing operators (1.2) the inclusion of ideals $\psi^{-\infty} \subset \psi^{-1}$ yields the following morphism of extensions,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Psi^{-\infty} \arrow[r] \arrow[d] & \Psi^0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{S}^0 = \Psi^0/\Psi^{-\infty} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Psi^{-1} \arrow[r] & \Psi^0 \arrow[r] & \Psi^0/\Psi^{-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Then, the cyclic cohomology class of the operator trace $[\mathrm{Tr}] \in HP^0(\Psi^{-\infty})$ extends to a cyclic cohomology class $[\tau] \in HP^0(\Psi^{-1})$, represented for any choice of integer $k > p$ by the following cyclic k-cocycle on ψ^{-1} :

$$\tau_k(x_0, \ldots, x_k) = \mathrm{Tr}(x_0 \ldots x_k)$$

By naturality of excision, the image of the trace $\partial[\mathrm{Tr}] \in HP^1(\mathcal{S}^0)$ by excision is the pull-back of the class $\partial[\tau] \in HP^1(\Psi^0/\Psi^{-1})$. We shall then make a slight abuse of notation by identifying both.

Let $P = \frac{1}{2}(1 + F)$. Then $[P, a] \in \Psi^{-1}$ for every $a \in A$. The linear map

$$\rho_F \ : \ \mathcal{A} \longrightarrow \Psi^0/\Psi^{-1} \ , \qquad \rho_F(a) = PaP \bmod \Psi^{-1} \ ,$$

is an algebra homomorphism since $Pa_1Pa_2P = Pa_1a_2P \bmod \Psi^{-1}$ for all $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$.

THEOREM 1.17. *The Chern-Connes character of the Fredholm module (H, F) is given by the odd cyclic cohomology class over $\mathcal{A}$*

$$\mathrm{ch}(H, F) = \rho_F^* \circ \partial([\mathrm{Tr}])$$

where $[\mathrm{Tr}] \in HP^0(\Psi^{-1})$ is the class of the operator trace, $\partial : HP^0(\Psi^{-1}) \to HP^1(\Psi^0/\Psi^{-1})$ is the excision map associated to extension (1.8), and $\rho_F^* : HP^1(\Psi^0/\Psi^{-1}) \to HP^1(\mathcal{A})$ is induced by the homomorphism ρ_F.

PROOF. Consider the algebra $\mathcal{E} = \{(Q, a) \in \Psi^0 \oplus \mathcal{A}\,;\, Q = PaP \bmod \Psi^{-1}\}$. The homomorphism $\mathcal{E} \to \mathcal{A}$, $(Q, a) \mapsto a$ yields an extension

$$0 \longrightarrow \Psi^{-1} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow 0\,.$$

By Example 27, the Chern-Connes character $\mathrm{ch}(H, F) \in HP^1(\mathcal{A})$ is the image of the operator trace under the excision map associated to this extension. On the other hand, the homomorphism $\mathcal{E} \to \Psi^0$, $(Q, a) \mapsto Q$ yields a commutative diagram of extensions

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Psi^{-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\rho_F"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Psi^{-1} \arrow[r] & \Psi^0 \arrow[r] & \Psi^0/\Psi^{-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

The conclusion then follows from the naturality of excision. $\square$

Chapitre 2

The flat case

At first sight, the index formula of Theorem 1.13 is local, given by residues. However, as already noted in Example 1.15, the formula obtained is rather involved.

This section is devoted to show how one may recover an interesting index formula from the Radul cocycle, working on the simplest foliation as possible. Despite that simplicity, this example will be important to lead the way towards the general case concerning the equivariant index theorem for H-elliptic operators.

For all this section, even if it is not explicitly mentioned, we consider $\mathbb{R}^n$ as a trivial foliation $\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^h$, where $0 \leqslant \nu \leqslant n$ and $h = n - \nu$, and consider the associated classical Heisenberg pseudodifferential operators $\Psi^0_{H,c}(\mathbb{R}^n)$ of order 0.

Our goal is to show that the Radul cocycle (1.7) on $\mathcal{S}^0_{H,c}(\mathbb{R}^n)$ is cohomologous in $\mathrm{HP}^1(\mathcal{S}_{H,c}(\mathbb{R}^n))$ to simple inhomogeneous (B, b)-cocycles of higher degree, making the computation of the index problem easier. We shall always use coordinates adapted to the foliation $\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^h$.

We shall give two ways of constructing these cocycles, one using excision and the other using techniques introduced by Quillen in [**40**].

1. General context

Recall from Section 1.5 that the residue trace of a Heisenberg pseudodifferential operator $P \in \Psi_{H,c}(\mathbb{R}^n)$ of symbol σ is given by

$$(2.1) \qquad ⨍ P = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{S^*_H \mathbb{R}^n} \iota_L \left(\sigma_{-(\nu+2h)}(x, \xi) \frac{\omega^n}{n!} \right)$$

where $\sigma_{-(\nu+2h)}$ is the Heisenberg homogeneous term of order $-(\nu+2h)$ in the asymptotic expansion of σ, $\omega = \sum_i dx_i d\xi_i$ is the standard symplectic form on $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$, and L is the generator of the Heisenberg dilations, given by the formula

$$L = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i \partial_{\xi_i} + 2 \sum_{i=\nu+1}^{n} \xi_i \partial_{\xi_i}$$

We first extend the trace on $\Psi_c^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ given in (1.5) to a graded trace on the graded algebra $\Psi_c^{-\infty}(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^\bullet T^*\mathbb{R}^n$, using a *Berezin integral* :

$$\mathrm{Tr}(K \otimes \alpha) = \alpha_{[2n]} \mathrm{Tr}(K)$$

where $K \in \Psi_c^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, and $\alpha_{[2n]}$ is the coefficient of the form $dx_1 \dots dx_n d\xi_1 \dots d\xi_n$ in α (the wedges are dropped to simplify notations). Here, we emphasize once more that $T^*\mathbb{R}^n$ is seen as the vector space $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$. Therefore $\Lambda^\bullet T^*\mathbb{R}^n$ stands for the exterior algebra of the vector space $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$, and not for the vector bundle of exterior powers of the cotangent bundle, as usual.

The latter procedure also extends the Connes-Moscovici residue to a graded trace on the graded algebra $\Psi_{H,c}(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^\bullet T^*\mathbb{R}^n$, and descends to a graded trace on $\mathcal{S}_{H,c}(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^\bullet T^*\mathbb{R}^n$. The composition law of pseudodifferential operators, or the star-product of symbols for the latter, are extended to these algebras just by imposing that they commute to elements of the exterior algebra.

Remark also that the following commutation relations hold

$$[x_i, \xi_j] = \mathbf{i}\delta_{i,j}, \quad [x_i, x_j] = [\xi_i, \xi_j] = 0$$

where we denote $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$. In short, $\mathrm{ad}(x_i)$ and $\mathrm{ad}(\xi_i)$ are respectively the differentiation of symbols with respect to the variables ξ_i and x_i.

Finally, let F be the multiplier on $\mathcal{S}_{H,c}(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^\bullet T^*\mathbb{R}^n$ defined by

$$F = \sum_i (x_i d\xi_i + \xi_i dx_i)$$

As the two following lemmas might indicate, this operator will play a role rather similar to operators usually denoted by F when dealing with finitely summable Fredholm modules. The difference is that this F here is not the main object of study, and acts more as an intermediate towards the main result.

LEMMA 2.1. *F^2 is equal to $\mathbf{i}\omega$, where ω is the standard symplectic form on $T^*\mathbb{R}^n$. In particular, F^2 commutes to every element in $\mathcal{S}_{H,c}(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^\bullet T^*\mathbb{R}^n$.*

LEMMA 2.2. *For every symbol $a \in \mathcal{S}_{H,c}(\mathbb{R}^n)$, one has*

$$[F, a] = \mathbf{i}da = \mathbf{i}\sum_i \left(\frac{\partial a}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial a}{\partial \xi_i}d\xi_i\right)$$

The proof of both lemmas follows from a simple computation, just using the commutation relations mentioned above. Another important property of the multiplier F, easy to verify, is the following

LEMMA 2.3. *For every $a \in \mathcal{S}_{H,c}(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^\bullet T^*\mathbb{R}^n$, we have*

$$⨍ [F, a] = 0$$

2. Construction by excision

The previous lemma, together with the fact that the Radul cocycle is the image of the operator trace by excision, shows that it may be relevant to consider the following cyclic cocycles on $\Psi_c^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, inspired from the formulas defining the Chern-Connes character recalled in Introduction, Theorem 11.

$$\phi_{2k}(a_0, ..., a_{2k}) = \frac{k!}{\mathbf{i}^k(2k)!}\mathrm{Tr}\left(a_0[F, a_1]\dots[F, a_{2k}] \otimes \frac{\omega^{n-k}}{n!}\right) \tag{2.2}$$

for $0 \leqslant k \leqslant n$. Therefore, we obtain the following result, very similar to that of Connes.

PROPOSITION 2.4. *The periodic cyclic cohomology classes of the cyclic cocycles ϕ_{2k} are independant of k.*

PROOF. Recall it suffices to set the cyclic cochain

$$\gamma_{2k+1}(a_0, \dots, a_{2k+1}) = \frac{(k+1)!}{\mathbf{i}^{k+1}(2k+2)!}\mathrm{Tr}\left(a_0 F[F, a_1]\dots[F, a_{2k+1}] \otimes \frac{\omega^{n-k}}{n!}\right) \tag{2.3}$$

It is then a straightforward calculation to verify that $(B + b)\gamma_{2k+1} = \phi_{2k} - \phi_{2k+2}$, which shows the result. □

At this stage, we are not very far from being done. To obtain the desired cyclic cocycles on the algebra $\mathcal{S}^0_{H,c}(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^\bullet T^*\mathbb{R}^n$ from those previously constructed, it suffices to push the latter using excision in periodic cyclic cohomology. Indeed, as we have the pseudodifferential extension

$$0 \longrightarrow \Psi_c^{-\infty}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Psi_{H,c}^0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}_{H,c}^0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow 0$$

we look at the image of the (B,b)-cocycles ϕ_{2k} under the boundary map

$$\partial : HP^0(\Psi_c^{-\infty}(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow HP^1(\mathcal{S}_{H,c}^0(\mathbb{R}^n))$$

Thanks to this, the cocycles (2.2) involving the operator trace, which are highly non-local, will be avoided and transferred to cocycles involving the Connes-Moscovici residue.

To compute the image of the the cocycles (2.2) under the excision map ∂, a slight refinement of the technique sketched in Example 26 is required. We first lift the cocycles ϕ_{2k} on $\Psi_c^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ to cyclic cochains $\widetilde{\phi}_{2k} \in CC^\bullet(\Psi_{H,c}^0(\mathbb{R}^n))$ using a zeta function renormalization,

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}_{2k}&(a_0, ..., a_{2k})\\ &= \frac{k!}{\mathbf{i}^k(2k)!}\frac{1}{2k+1}\sum_{i=0}^{2k} \mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}\left(a_0[F,a_1]\dots[F,a_i]\Delta^{-z/4}[F,a_{i+1}]\dots[F,a_{2k}] \otimes \frac{\omega^{n-k}}{n!}\right)\end{aligned}$$

For $k = 0$, we already know that $\partial[\phi_0]$ is represented by the Radul cocycle

$$c(a_0, a_1) = ⨍ a_0 \delta a_1$$

where $\delta a_1 = [\log|\xi|', a_1]$.

Now, let $k \in \mathbb{N}$. Then, the usual construction of the boundary map in cohomology associated to an extension gives that $\partial[\phi_{2k}]$ is represented by the inhomogeneous (B,b)-cocycle

$$(B+b)\widetilde{\phi}_{2k} = \psi_{2k-1} + \phi_{2k+1} \in CC^{2k-1}(\Psi_{H,c}^0(\mathbb{R}^n)) \oplus CC^{2k+1}(\Psi_{H,c}^0(\mathbb{R}^n))$$

where $\psi_{2k-1} = B\widetilde{\phi}_{2k}$ and $\phi_{2k+1} = b\widetilde{\phi}_{2k}$ are given by

$$\begin{aligned}\psi_{2k-1}&(a_0, \dots, a_{2k-1})\\ &= \frac{k!}{\mathbf{i}^k(2k)!}\sum_{i=0}^{2k-1}(-1)^{i+1} ⨍ \left(a_0[F,a_1]\dots[F,a_i]\delta F[F,a_{i+1}]\dots[F,a_{2k-1}] \otimes \frac{\omega^{n-k}}{n!}\right)\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\phi_{2k+1}&(a_0, \dots, a_{2k+1})\\ &= \frac{k!}{\mathbf{i}^k(2k+1)!}\sum_{i=1}^{2k+1}(-1)^{i-1} ⨍ \left(a_0[F,a_1]\dots[F,a_{i-1}]\delta a_i[F,a_{i+1}]\dots[F,a_{2k+1}] \otimes \frac{\omega^{n-k}}{n!}\right)\end{aligned} \tag{2.5}$$

where we define ψ_{-1} as zero. ϕ_1 is precisely the Radul cocycle. For the clarity of the exposition, the calculations will be detailed later in Section 5 of the chapter. Then, we have :

PROPOSITION 2.5. *The Radul cocycle* c *is cohomologous in the* (B,b)*-complex, to the* (B,b)*-cocycles* $(\psi_{2k-1}, \phi_{2k+1})$*, for all* $1 \leqslant k \leqslant n$.

Indeed, usual properties of boundary maps in cohomology automatically ensures this result. As a matter of fact, one can be more precise and give explicitly the transgression cochains allowing to pass from one cocycle to another. For this, we lift the transgression cochain γ given in (2.3) to the (B,b)-cochain $\widetilde{\gamma} \in CC^\bullet(\Psi_{H,c}(\mathbb{R}^n))$, using the same trick as before :

$$\begin{aligned}\widetilde{\gamma}_{2k+1} = \frac{(k+1)!}{\mathbf{i}^{k+1}(2k+2)!}\frac{1}{2k+3}&\left[\mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}\left(a_0\Delta^{-z/4}F[F,a_1]\dots[F,a_{2k+1}] \otimes \frac{\omega^{n-k-1}}{n!}\right)\right.\\ &\left.+\sum_{i=0}^{2k+1}\mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}(a_0F[F,a_1]\dots[F,a_i]\Delta^{-z/4}[F,a_{i+1}]\dots[F,a_{2k+1}] \otimes \frac{\omega^{n-k-1}}{n!}\Bigg)\right]\end{aligned}$$

and the term $i = 0$ of the sum means $\mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}(a_0 F\Delta^{-z}[F, a_1] \ldots, [F, a_{2k+1}] \otimes \frac{\omega^{n-k-1}}{n!})$ in the right hand-side.

PROPOSITION 2.6. *The inhomogeneous* (B, b)*-cochains*

$$\widetilde{\phi}_{2k} - \widetilde{\phi}_{2k+2} - (B+b)\widetilde{\gamma}_{2k+1} = \gamma_{2k} - \gamma'_{2k+2} \in CC^{2k}(\Psi^0_{H,c}(\mathbb{R}^n)) \oplus CC^{2k+2}(\Psi^0_{H,c}(\mathbb{R}^n))$$

for $0 \leqslant k \leqslant n$*, viewed as cochains on* $\mathcal{S}_{H,c}(\mathbb{R}^n)$*, are transgression cochains between* $(\psi_{2k-1}, \phi_{2k+1})$ *and* $(\psi_{2k+1}, \phi_{2k+3})$*, that is,*

$$(\psi_{2k-1} + \phi_{2k+1}) - (\psi_{2k+1} + \phi_{2k+3}) = (B+b)(\gamma_{2k} - \gamma'_{2k+2})$$

Moreover, one has

$$\gamma_{2k}(a_0, \ldots, a_{2k}) = \frac{k!}{2\mathbf{i}^{k+1}(2k+1)!} \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i ⨍ \left(a_0 F[F, a_1] \ldots [F, a_i]\delta F[F, a_{i+1}] \ldots [F, a_{2k+1}] \otimes \frac{\omega^{n-k-1}}{n!} \right) \tag{2.6}$$

$$\gamma'_{2k}(a_0, \ldots, a_{2k}) = ⨍ \left(a_0 \delta a_1 [F, a_2] \ldots [F, a_{2k}] \otimes \frac{\omega^{n-k}}{n!} \right) + \frac{k!}{\mathbf{i}^k(2k+1)!} \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i-1} ⨍ \left(a_0 F[F, a_1] \ldots [F, a_{i-1}]\delta a_i [F, a_{i+1}] \ldots [F, a_{2k}] \otimes \frac{\omega^{n-k}}{n!} \right) \tag{2.7}$$

That $\widetilde{\phi}_{2k} - \widetilde{\phi}_{2k+2} - (B+b)\widetilde{\gamma}_{2k+1}$ gives a transgression cochain comes once again from the construction of a boundary map in cohomology associated to a short exact sequence. Once more, the calculations leading to these formulas are given in Section 5 of the chapter.

3. Construction with Quillen's Algebra Cochains

The interest about Quillen's theory of cochains here is that the (B, b)-cocycles we want to get are obtained purely algebraically, since shall do not need to pass first through cocycles on the algebra of regularizing operators. For the convenience of the reader, we briefly recall this formalism, and let him report to the original paper [40] or Section 6 of the chapter for more details.

3.1. Preliminaries. Let $\mathcal{A}$ an associative algebra over $\mathbb{C}$ with unit. The *bar construction* B of $\mathcal{A}$ is the differential graded coalgebra $B = \bigoplus_{n \geqslant 0} B_n$, with $B_n = \mathcal{A}^{\otimes n}$ for $n \geqslant 0$ with coproduct $\Delta : B \to B \otimes B$

$$\Delta(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} (a_1, \ldots, a_i) \otimes (a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

The counit map η is the projection onto $\mathcal{A}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$, and the differential is b' :

$$b'(a_1, \ldots, a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_{n+1})$$

which is defined as the zero-map on B_0 and B_1. These operations confer a structure of differential graded coalgebra to B.

A *bar cochain of degree n* on $\mathcal{A}$ is a n-linear map over $\mathcal{A}$ with values in an algebra L. These cochains form a complex denoted $\mathrm{Hom}(B, L)$, whose differential is given by

$$\delta_{\mathrm{bar}} f = (-1)^{n+1} f b'$$

for $f \in \mathrm{Hom}^n(B, L)$. Moreover, one has a product on $\mathrm{Hom}(B, L)$: If f and g are respectively cochains of degrees p and q, it is given by

$$fg(a_1, \dots, a_{p+q}) = (-1)^{pq} f(a_1, \dots, a_p) g(a_{p+1}, \dots, a_{p+q})$$

Therefore, $\mathrm{Hom}(B, L)$ has a structure of differential graded algebra.

EXAMPLE 2.7. Let $\rho : \mathcal{A} \to L$ be a 1-cochain, i.e a linear map. See ρ as a "connection" and define its "curvature" $\omega = \delta_{\mathrm{bar}}\rho + \rho^2$. A little calculation shows that

$$\omega(a_1, a_2) = \rho(a_1 a_2) - \rho(a_1)\rho(a_2)$$

that is, ρ is a morphism of algebras if and only if its curvature vanishes. One has the Bianchi identity

$$\delta_{\mathrm{bar}}\omega = -[\rho, \omega]$$

and more generally, using that δ_{bar} and $\mathrm{ad}\,\rho$ are derivations, we get by induction

$$\delta_{\mathrm{bar}}\omega^n = -[\rho, \omega^n]$$

We next define Ω^B and $\Omega^{B,\natural}$ to be the following bicomodules over B :

$$\Omega^B = B \otimes \mathcal{A} \otimes B, \quad \Omega^{B,\natural} = \mathcal{A} \otimes B$$

Here, the $\natural$ in exponent means that $\Omega^{B,\natural}$ is the cocommutator subspace of Ω^B. Thanks to this, one can show that the differential δ_{bar} induced on $\Omega^{B,\natural}$ is in fact the Hochschild boundary, and deduce that the complex $(\mathrm{Hom}(\Omega^{B,\natural}, \mathbb{C}), b)$ is isomorphic to the Hochschild complex $(CC^\bullet(\mathcal{A}), b)$ of $\mathcal{A}$, with degrees shifted by one.

We recall Quillen's terminology. Let L be a differential graded algebra. We call *Ω-cochains* the elements in $\mathrm{Hom}(\Omega^B, L)$, and *Hochschild cochains* those in $\mathrm{Hom}(\Omega^{B,\natural}, L)$. Recall also that the bar cochains are the elements of $\mathrm{Hom}(B, L)$.

IMPORTANT FACT. A cochain f of this kind has three degrees : a $\mathcal{A}$-degree as a multilinear map over $\mathcal{A}$, a L degree and a total degree f, which is sum. This is the one which will be considered.

The map $\natural : \Omega^{B,\natural} \to \Omega^B$, defined by the formula

$$\natural(a_1 \otimes (a_2, \dots, a_n)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i(n-1)} (a_{i+1}, \dots, a_n) \otimes a_1 \otimes (a_2, \dots, a_i)$$

induces a map from Hochschild cochains to bar cochains. If we have a (graded) trace $\tau : L \longrightarrow \mathbb{C}$, we then obtain a *morphism of complexes*

$$\begin{array}{rccc} \tau^\natural : & \mathrm{Hom}(\Omega^B, L) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\Omega^{B,\natural}, \mathbb{C}) \\ & f & \longmapsto & \tau^\natural(f) = \tau f \natural \end{array}$$

3.2. Recovering Connes' cyclic cocycles associated to a Fredholm module. The aim of this paragraph is to recall how to recover the Connes' cyclic cocycles associated to a Fredholm module, using a Chern-Weil construction in this context. The notions of connection and curvature are those of Example 2.7.

Let $(\mathcal{A}, H, F)$ be a p-summable odd Fredholm module, and denote $\rho : \mathcal{A} \to L = \mathcal{B}(H)$ the representation H of $\mathcal{A}$. Denote B the bar construction of $\mathcal{A}$. We should then view ρ as a 1-cochain of curvature zero. Then, introduce the "superconnection" $F + \delta_{\mathrm{bar}} + \rho$, which curvature is

$$K = F^2 + [F, \rho] = 1 + [F, \rho]$$

and consider the even cochain

$$\theta = \mathrm{Tr}^\natural(\partial\rho \cdot e^K)$$

A straightforward computation then shows that the degree k components of θ are

$$\theta_k(a_0, \dots, a_{k-1}) = \frac{e}{(k-1)!}\mathrm{Tr}(a_0[F, a_1] \dots [F, a_{k-1}])$$

for $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathcal{A}$.

Appliying verbatim the proof of the following paragraph allows to recover the fact that these formulas give cyclic cocycles. Note however that we do not automatically have the right normalization constants from Theorems 10 and 11.

Let us also mention that a similar construction found by Higson allows to recover the residue cocycle of Connes and Moscovici recalled in Introduction, Section 2.3. The interested reader should consult [22], Appendix B.

3.3. Return to the initial problem. We can now return to our context. Let $\mathcal{A}$ be the algebra $\mathcal{S}^0_{H,c}(\mathbb{R}^n)$ of Heisenberg formal symbols on $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^h$, and B the bar construction of $\mathcal{A}$. Also, let L be the graded algebra $\mathcal{S}^0_{H,c}(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^\bullet T^*\mathbb{R}^n$. The product on these algebras is the star-product of symbols, twisted with the product on the exterior algebra. The injection

$$\rho : \mathcal{A} \longrightarrow L$$

is a homomorphism of algebras. As a consequence, ρ is a 1-cochain of curvature zero. We introduce a formal parameter κ of odd degree such that $\kappa^2 = 0$, and shall actually work in the extended algebra

$$\mathrm{Hom}(B, L)[\kappa] = \mathrm{Hom}(B, L) + \kappa\mathrm{Hom}(B, L)$$

The role of that κ is to kill the powers of $\log|\xi|'$ which are not classical symbols, and to keep only its commutator with other symbols.

Now, denote $\nabla = F + \kappa \log|\xi|'$, and $\nabla^2 = F^2 + \kappa[\log|\xi|', F]$ the square of ∇, and introduce the "superconnection" $\nabla + \delta_{\mathrm{bar}} + \rho$. The fact that this operator does not belong to the algebra above is not a problem, since we shall only have interest in its "curvature", which is well defined,

$$K = \nabla^2 + [\nabla, \rho] = F^2 + \kappa[\log|\xi|', F] + [F + \kappa \log|\xi|', \rho]$$

and its action on $\mathrm{Hom}(B, L)[\kappa]$ with commutators. Here, we emphasize that the commutators involved are in fact *graded commutators*. Let τ be the graded trace on $\mathrm{Hom}(B, L)[\kappa] \otimes \Lambda^\bullet T^*\mathbb{R}^n$ given by

$$\tau(x + \kappa y) = ⨍ y$$

It turns out that the cocycles (2.4) and (2.5) constructed using excision in the previous section are obtained by considering the even cochain

$$\theta = \tau^\natural(\partial\rho \cdot e^K) \in \mathrm{Hom}(\Omega^{B,\natural}, \mathbb{C})$$

where $(\partial f \cdot g)\natural$ is defined, for $f, g \in \mathrm{Hom}(\Omega^B, L)$ of respective degrees 1 and $n-1$, by the following formula :

$$(\partial f \cdot g)\natural(a_1 \otimes (a_2, \dots, a_n)) = (-1)^{|g|} f(a_1) g(a_2, \dots, a_n)$$

The calculation of θ becomes easier if one remarks that

$$e^K = e^{F^2} \cdot e^{[F,\rho] + \kappa[\log|\xi|', F+\rho]}$$

as $F^2 = \mathbf{i}\omega$ is central in L. Then, this easily provides that $\theta = \sum_k(\theta'_{2k} + \theta''_{2k})$, where

$$\theta'_{2k} = \frac{\mathbf{i}^{n-k+1}}{(2k-1)!} \sum_{i=1}^{2k-1} ⨍ \left(\partial\rho \cdot [F, \rho]^{i-1} \delta\rho [F, \rho]^{2k-1-i} \otimes \frac{\omega^{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right) \tag{2.8}$$

$$\theta''_{2k} = \frac{\mathbf{i}^{n-k}}{(2k)!} \sum_{i=0}^{2k-1} ⨍ \left(\partial\rho \cdot [F,\rho]^i \delta F [F,\rho]^{2k-1-i} \otimes \frac{\omega^{n-k}}{(n-k)!} \right) \tag{2.9}$$

Evaluating on elements of $\mathcal{A}$, this gives :

$$\begin{aligned} &\theta'_{2k}(a_0,\dots,a_{2k-1}) \\ &= \frac{\mathbf{i}^{n-k+1}}{(2k-1)!} \sum_{i=1}^{2k-1} (-1)^i ⨍ \left(a_0[F,a_1]\dots[F,a_{i-1}]\delta a_i [F,a_{i+1}]\dots[F,a_{2k-1}] \otimes \frac{\omega^{n-k+1}}{(n-k+1)!} \right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} &\theta''_{2k}(a_0,\dots,a_{2k-1}) \\ &= \frac{\mathbf{i}^{n-k}}{(2k)!} \sum_{i=0}^{2k-1} (-1)^{i+1} ⨍ \left(a_0[F,a_1]\dots[F,a_i]\delta F [F,a_{i+1}]\dots[F,a_{2k-1}] \otimes \frac{\omega^{n-k}}{(n-k)!} \right) \end{aligned} \tag{2.11}$$

The signs above which do not appear in the cochains (2.8) and (2.9) occur since the a_i, $\delta\rho$ and δF are odd.

As announced earlier, we observe that θ'_{2k} and θ''_{2k} are up to a certain constant term the cochains ϕ_{2k-1} and ψ_{2k-1} obtained in (2.4) and (2.5). The difference in signs is due to Quillen's formalism, which considers the total differential $B - b$, see Remark 2.16. Unfortunately, each component of $\theta_{2k} = \theta'_{2k} + \theta''_{2k}$ of θ is not a (B,b)-cocycle, but taking the entire cochain θ into account, this is.

To prove this, it only suffices to check that all the things we defined have the good algebraic properties to fit into Quillen's proof. This is the content of the following lemma, which is actually a "Bianchi identity" with respect to the "superconnection" $\nabla + \delta_{\text{bar}} + \rho$.

LEMMA 2.8. (Bianchi identity.) *We have* $[\nabla, K] = 0$. *In detail, this gives*

$$(\delta_{\text{bar}} + \operatorname{ad}\rho + \operatorname{ad}\nabla)K = (\delta_{\text{bar}} + \operatorname{ad}\rho + \operatorname{ad}\nabla)e^K = 0,$$

where ad *denotes the (graded) adjoint action.*

REMARK 2.9. The thing which guarantees this identity is that $[\nabla,\nabla] = 0$. Then, the proof is the same as that given in the paper of Quillen, [40], Section 7. Thanks to this lemma, we directly know that $(B-b)\theta = 0$, by adapting the arguments of [40], Sections 7 and 8. For the convenience of the reader, we recalled these arguments in Section 6. This result can be refined, and we get the same results as those obtained using excision.

THEOREM 2.10. *The inhomogeneous Hochschild cochains*

$$\theta''_{2k} - \theta'_{2k+2} \in \operatorname{Hom}^{2k}(\Omega^{B,\natural},\mathbb{C}) \oplus \operatorname{Hom}^{2k+2}(\Omega^{B,\natural},\mathbb{C})$$

for $0 \leqslant k \leqslant n$, *define a* (B,b)*-cocycle.*

PROOF. Introduce a parameter $t \in \mathbb{R}$, and consider the following family of curvatures $(K(t))$:

$$K(t) = \nabla^2(t) + [tF + \kappa \log|\xi|', \rho]$$

where $\nabla^2(t) = F^2 + \kappa[\log|\xi|', tF]$. Because the identity $[\nabla, \nabla^2(t)]$ still holds, we have a Bianchi identity

$$(\delta_{\text{bar}} + \operatorname{ad}\rho + \operatorname{ad}\nabla)K(t) = 0$$

Thus, the Hochschild cochain

$$\theta(t) = \tau^\natural(\partial\rho \cdot e^{K(t)}) \in \operatorname{Hom}(\Omega^{B,\natural},\mathbb{C})[t]$$

satisfies the relation $(B-b)\theta(t)=0$ for every $t\in\mathbb{R}$, where we denote by $R[t]$ the polynomials with coefficients in an algebra R. Therefore, this relation also holds for every k, for the coefficient of t^k. This coefficient is the cochain $\theta''_{2k}+\theta'_{2k+2}$, thus, $\theta''_{2k}-\theta'_{2k+2}$ defines a (B,b)-cocycle. $\square$

Denote by $\Omega=[F,\rho]+\kappa[\log|\xi|',\rho+F]$. The cochains which cobounds these cocycles (up to modify each of them by a constant term depending on their degrees) may be obtained rather easily by using suitable linear combinations of pairs of bar cochains (μ_{2j},μ_{2j+1}), where μ is given by :

$$\mu_k=\tau\left(\partial\rho\cdot\frac{e^{F^2}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\Omega^i F\Omega^{k-i}\right)$$

Doing this gives transgression formulas in the spirit of those obtained in Proposition 2.6.

4. Index theorem

Now we know that the Radul cocycle on $\mathcal{S}^0_{H,c}(\mathbb{R}^n)$

$$c(a_0,a_1)=⨍ a_0\delta a_1$$

with $\delta a_1=[\log|\xi|',a_1]$, is cohomologous to the inhomogeneous (B,b)-cocycle

$$\psi_{2n-1}+\phi_{2n+1}\in CC^{2n-1}(\mathcal{S}^0_{H,c}(\mathbb{R}^n))\oplus CC^{2n+1}(\mathcal{S}^0_{H,c}(\mathbb{R}^n))$$

recalling that,

$$\psi_{2n-1}(a_0,\dots,a_{2n-1})=\frac{1}{\mathbf{i}^n(2n)!}\sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^{i+1}⨍ a_0[F,a_1]\dots[F,a_i]\delta F[F,a_{i+1}]\dots[F,a_{2n-1}]$$

$$\phi_{2n+1}(a_0,\dots,a_{2n+1})=$$
$$\frac{1}{\mathbf{i}^n(2n+1)!}\sum_{i=1}^{2n+1}(-1)^{i-1}⨍ a_0[F,a_1]\dots[F,a_{i-1}]\delta a_i[F,a_{i+1}]\dots[F,a_{2n+1}]$$

it suffices to compute $\psi_{2n-1}+\phi_{2n+1}$ to obtain an index theorem. To begin, we first notice that by Lemma 2.2, we may rewrite the cocycles above as

$$\psi_{2n-1}(a_0,\dots,a_{2n-1})=\frac{\mathbf{i}^{2n-1}}{\mathbf{i}^n(2n)!}\sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^{i+1}⨍ a_0da_1\dots da_i\delta F da_{i+1}\dots da_{2n-1}\tag{2.12}$$

$$\phi_{2n+1}(a_0,\dots,a_{2n+1})=\frac{\mathbf{i}^{2n-1}}{\mathbf{i}^n(2n+1)!}\sum_{i=1}^{2n+1}(-1)^{i-1}⨍ a_0da_1\dots da_{i-1}\delta a_i da_{i+1}\dots da_{2n+1}\tag{2.13}$$

The extension of the Connes-Moscovici residue to $\Lambda^\bullet T^*\mathbb{R}^n$-valued symbols imposes that the $⨍$ selects only the coefficient associated to the volume form $dx_1\dots dx_n d\xi_1\dots d\xi_n$. In (2.13), this coefficient must be a sum of terms of the form $\frac{\partial b_1}{\partial x_1}\dots\frac{\partial b_n}{\partial x_n}\frac{\partial b_{n+1}}{\partial\xi_1}\dots\frac{\partial b_{2n}}{\partial\xi_n}$ for some Heisenberg symbols $b_1,\dots,b_n$ of *order 0*. Such terms have Heisenberg pseudodifferential order $-(\nu+2h)$.

However, in (2.13), there is in each sum an additional factor of the form δa_i, which is a symbol of degree -1. Therefore, the symbols appearing in the formula are at most of Heisenberg order $-(\nu+2h+1)$, and vanishes because of (2.1). In particular, the inhomogeneous cocycle $(\psi_{2n-1},\phi_{2n+1})=(\psi_{2n-1})$ turns into a homogeneous one and is therefore cyclic.

The formula for the cocycle (2.12) also reduces to a more simple one, but which is in general non-zero. A simple computation gives that

$$\delta F=\mathbf{i}\left(\sum_{i=1}^{\nu}\frac{\xi_i^3 d\xi_i}{|\xi|'^4}+\frac{1}{2}\sum_{i=\nu+1}^{n}\frac{\xi_i d\xi_i}{|\xi|'^4}\right)$$

Then, we proceed as we did to obtain the formula (2.13). The coefficient on $dx_1 \dots dx_n d\xi_1 \dots d\xi_n$ of the symbols in (2.12) must be of the form

(i) $\frac{\partial b_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial b_n}{\partial x_n} \frac{\partial b_{n+1}}{\partial \xi_1} \dots \frac{\xi_i^3}{|\xi|'^4} \dots \frac{\partial b_{2n}}{\partial \xi_n}$ if $1 \leqslant i \leqslant \nu$,

(ii) $\frac{\partial b_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial b_n}{\partial x_n} \frac{\partial b_{n+1}}{\partial \xi_1} \dots \frac{\xi_i}{|\xi|'^4} \dots \frac{\partial b_{2n}}{\partial \xi_n}$ if $\nu + 1 \leqslant i \leqslant n$

where in each point, the term depending on $|\xi|'^4$ replaces the term $\frac{\partial b_{n+i}}{\partial \xi_i}$. In all case, these terms are of order $-(\nu + 2h)$. Thus, if we denote the Heisenberg principal symbol by

$$\sigma : \mathcal{S}^0_{H,c}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(S^*_H\mathbb{R}^n)$$

the symbol of order $-(\nu + 2h)$ of $a_0 da_1 \dots da_i \delta F da_{i+1} \dots da_{2n-1}$ is

$$\sigma(a_0)d\sigma(a_1)\dots d\sigma(a_i)\delta F d\sigma(a_{i+1})\dots d\sigma(a_{2n-1}) = (-1)^i \delta F \sigma(a_0)d\sigma(a_1)\dots d\sigma(a_{2n-1})$$

We emphasize that the latter product is no more the star-product but the usual product of functions.

The vector field $L = \sum_{j=1}^{\nu} \xi_j \partial_{\xi_j} + 2\sum_{j=\nu+1}^{n} \xi_j \partial_{\xi_j}$ on $T^*\mathbb{R}^n$ is the generator of the Heisenberg dilations. This implies that $\iota_L d\sigma(a_i) = d\sigma(a_i)\cdot L = 0$ since the a_i are symbols of order 0. Using (2.1), and observing that $\iota_L \delta F = \mathbf{i}$, we obtain

$$\psi_{2n-1}(a_0, \dots, a_{2n-1}) = -\frac{1}{(2\pi\mathbf{i})^n(2n-1)!}\int_{S^*_H\mathbb{R}^n} \sigma(a_0)d\sigma(a_1)\dots d\sigma(a_{2n-1})$$

So, we have proved the following theorem

THEOREM 2.11. *The Radul cocycle is* (B, b)*-cohomologous to the homogeneous cyclic cocycle on* $\mathcal{S}_{H,c}(\mathbb{R}^n)$ *defined by*

$$\psi_{2n-1}(a_0, \dots, a_{2n-1}) = -\frac{1}{(2\pi\mathbf{i})^n(2n-1)!}\int_{S^*_H\mathbb{R}^n} \sigma(a_0)d\sigma(a_1)\dots d\sigma(a_{2n-1})$$

Pairing this cocycle with K-theory[1] finally yields the following index theorem for H-elliptic pseudodifferential operators of order 0.

THEOREM 2.12. *Let* $P \in M_N(\Psi^0_{H,c}(\mathbb{R}^n)^+)$ *be a H-elliptic operator of symbol* $u \in GL_N(\mathcal{S}^0_{H,c}(\mathbb{R}^n)^+)$*, and* $[u] \in K_1(\mathcal{S}^0_{H,c}(\mathbb{R}^n)^+)$ *its (odd) K-theory class. Then, we have a formula for the Fredholm index of P :*

$$\mathrm{Ind}(P) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Ind}[u]) = \frac{(-1)^n(n-1)!}{(2\pi\mathbf{i})^n(2n-1)!}\int_{S^*_H\mathbb{R}^n} \mathrm{tr}(\sigma(u)^{-1}d\sigma(u)(d\sigma(u)^{-1}d\sigma(u))^{n-1}))$$

5. Computations of Section 2

We give here the details of the different computations allowing to derive the different formulas of Section 3.

5.1. Cocycles formulas. Recall that

$$\widetilde{\phi}_{2k}(a_0, \dots, a_{2k}) = \frac{k!}{\mathbf{i}^k(2k)!}\frac{1}{2k+1}\sum_{i=0}^{2k} \mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}\left(a_0[F, a_1]\dots[F, a_i]\Delta^{-z/4}[F, a_{i+1}]\dots[F, a_{2k}] \otimes \frac{\omega^{n-k}}{n!}\right)$$

1. Recall it is given, for any $[\phi] \in HP^1(\mathcal{S}_{H,c}(\mathbb{R}^n))$ and $u \in K_1(\mathcal{S}_{H,c}(\mathbb{R}^n))$, by the formula

$$\langle[\phi], u\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle\phi, \mathrm{ch}_1(u)\rangle = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k k!(\phi_{2k+1}\otimes \mathrm{tr})(u^{-1}, u, \dots, u^{-1}, u)$$

where tr is the trace of matrices

FORMULA (2.4). We compute $\psi_{2k-1} = B\widetilde{\phi}_{2k}$

$$
\begin{aligned}
&B\widetilde{\phi}_{2k}(a_0, ..., a_{2k-1}) \\
&= \frac{k!}{\mathbf{i}^k(2k)!}\frac{1}{2k+1}\sum_{i=0}^{2k} \mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}\Big[\Big([F,a_0]\dots[F,a_i]\Delta^{-z/4}[F,a_{i+1}]\dots[F,a_{2k-1}] \\
&\qquad - [F,a_{2k-1}][F,a_0]\dots[F,a_{i-1}]\Delta^{-z/4}[F,a_i]\dots[F,a_{2k-2}] + \dots \\
&\qquad +(-1)^{2k-1}[F,a_1]\dots[F,a_{i+1}]\Delta^{-z/4}[F,a_{i+2}]\dots[F,a_{2k-1}][F,a_0]\Big)\otimes\frac{\omega^{n-k}}{n!}\Big]
\end{aligned}
$$

Then, by the graded trace property, one can remark that all the terms of the sum $\sum_{i=0}^{2k}\dots$ are similar, so, this sum equals $(2k+1)$ times the term $i = 0$.

$$
\begin{aligned}
&B\widetilde{\phi}_{2k}(a_0, ..., a_{2k-1}) \\
&\quad = \frac{k!}{\mathbf{i}^k(2k)!}\mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}\Big[\Big([F,a_0]\dots[F,a_{2k-1}]\Delta^{-z/4} - [F,a_{2k-1}][F,a_0]\dots[F,a_{2k-2}]\Delta^{-z/4} \\
&\qquad\qquad + \dots + (-1)^{2k-1}[F,a_1]\dots[F,a_{2k-1}][F,a_0]\Delta^{-z/4}\Big)\otimes\frac{\omega^{n-k}}{n!}\Big] \\
&\quad = \frac{k!}{\mathbf{i}^k(2k)!}\sum_{i=0}^{2k-1}\mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}\left([F,a_0]\dots[F,a_i]\Delta^{-z/4}[F,a_{i+1}]\dots[F,a_{2k-1}]\otimes\frac{\omega^{n-k}}{n!}\right)
\end{aligned}
$$

where we used the graded trace property in the second equality. Then, writing $[F,a_0] = Fa_0 - a_0F$, using the fact that F anticommutes with the $[F,a_i]$ and the graded trace property again, we obtain

$$
\begin{aligned}
&B\widetilde{\phi}_{2k}(a_0, ..., a_{2k-1}) \\
&= \frac{k!}{\mathbf{i}^k(2k)!}\sum_{i=0}^{2k-1}\mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}\Big(a_0[F,a_1]\dots[F,a_i]((-1)^{2k-i}\Delta^{-z/4}F - (-1)^iF\Delta^{-z/4})[F,a_{i+1}] \\
&\qquad\qquad \dots[F,a_{2k-1}]\otimes\frac{\omega^{n-k}}{n!}\Big) \\
&= \frac{k!}{\mathbf{i}^k(2k)!}\sum_{i=0}^{2k-1}(-1)^{i+1}\mathrm{Res}_{z=0}\mathrm{Tr}\Big(a_0[F,a_1]\dots[F,a_i]\frac{[F,\Delta^{-z/4}]}{z}[F,a_{i+1}] \\
&\qquad\qquad \dots[F,a_{2k-1}]\otimes\frac{\omega^{n-k}}{n!}\Big)
\end{aligned}
$$

From Theorem 1.13, or, to be more precise, the part of the proof allowing to pass from the Partie Finie to the residue, we finally obtain

$$
\begin{aligned}
&B\widetilde{\phi}_{2k}(a_0, ..., a_{2k-1}) \\
&\qquad = \frac{k!}{\mathbf{i}^k(2k)!}\sum_{i=0}^{2k-1}(-1)^{i+1}⨍\left(a_0[F,a_1]\dots[F,a_i]\delta F[F,a_{i+1}]\dots[F,a_{2k-1}]\otimes\frac{\omega^{n-k}}{n!}\right) \\
&\qquad = \psi_{2k-1}(a_0,\dots,a_{2k-1})
\end{aligned}
$$

□

FORMULA (2.5). We now compute $\phi_{2k+1} = b\widetilde{\phi}_{2k}$. As $[F, .]$ is an derivation on $\mathcal{S}_{H,c}(\mathbb{R}^n)$, the following equality may be observed easily

$$b\widetilde{\phi}_{2k}(a_0, ..., a_{2k+1}) = \frac{k!}{\mathbf{i}^k(2k+1)!}\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i \mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}\Big(a_0[F, a_1]\dots[F, a_i][a_{i+1}, \Delta^{-z/4}] \\ [F, a_{i+2}]\dots[F, a_{2k+1}]) \otimes \frac{\omega^{n-k}}{n!}\Big)$$

Again, from the proof of Theorem 1.13, we finally have

$$\begin{aligned} &b\widetilde{\phi}_{2k}(a_0, ..., a_{2k+1}) \\ &= \frac{k!}{\mathbf{i}^k(2k+1)!}\sum_{i=1}^{2k+1}(-1)^{i-1} ⨍ \Big(a_0[F, a_1]\dots[F, a_{i-1}]\delta a_i[F, a_{i+1}]\dots[F, a_{2k+1}] \otimes \frac{\omega^{n-k}}{n!}\Big) \\ &= \phi_{2k+1}(a_0, ..., a_{2k+1}) \end{aligned}$$

□

5.2. Transgression formulas. We now give the details of the computations needed to obtain the formulas of Proposition 2.6. Recall that

$$\begin{aligned} &\widetilde{\gamma}_{2k+1}(a_0, \dots, a_{2k+1}) \\ &= \frac{(k+1)!}{\mathbf{i}^{k+1}(2k+2)!}\frac{1}{2k+3}\Bigg[\mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}\Big(a_0\Delta^{-z/4}F[F, a_1]\dots[F, a_{2k+1}] \otimes \frac{\omega^{n-k-1}}{n!}\Big) \\ &\qquad + \sum_{i=0}^{2k+1}\mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}\Big(a_0F[F, a_1]\dots[F, a_i]\Delta^{-z}[F, a_{i+1}]\dots[F, a_{2k+1}] \otimes \frac{\omega^{n-k-1}}{n!}\Big)\Bigg] \end{aligned}$$

where the term $i = 0$ of the sum means $\mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}\Big(a_0F\Delta^{-z}[F, a_1]\dots, [F, a_{2k+1}] \otimes \frac{\omega^{n-k-1}}{n!}\Big)$.

FORMULA (2.6). We compute $B\widetilde{\gamma}_{2k+1}(a_0, \dots, a_{2k})$. By the graded trace property, applying the operator B to each term of $\widetilde{\gamma}_{2k+1}$ yields the same contribution. As there are $(2k+3)$ terms, we have

$$B\widetilde{\gamma}_{2k+1}(a_0, \dots, a_{2k}) = \frac{(k+1)!}{\mathbf{i}^{k+1}(2k+2)!}\mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}\Big(F[F, a_0]\dots[F, a_{2k}] \\ + F[F, a_{2k}][F, a_0]\dots[F, a_{2k-1}] + \dots + F[F, a_1]\dots F[F, a_{2k}][F, a_0])\Delta^{-z/4} \otimes \frac{\omega^{n-k-1}}{n!}\Big)$$

Writing $\frac{(k+1)!}{(2k+2)!} = \frac{1}{2}\frac{k!}{(2k+1)!}$, knowing that F anticommutes to the $[F, a_i]$ and that $F^2 = \mathbf{i}\omega$ is central, developing $F[F, a_0]$ and finally using the graded trace property, we obtain

$$\begin{aligned} &B\widetilde{\gamma}_{2k+1}(a_0, \dots, a_{2k}) \\ &= \frac{k!}{\mathbf{i}^{k+1}(2k+1)!}\cdot\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2k}\mathrm{Pf}_{z=0}\Big((a_0F^2 - Fa_0F)[F, a_1]\dots\Delta^{-z/4}\dots[F, a_{2k}]) \otimes \frac{\omega^{n-k-1}}{n!}\Big) \end{aligned}$$

Once again using that $F^2 = \mathbf{i}\omega$, we can write

$$\begin{aligned} &\widetilde{\phi}_{2k}(a_0, \dots, a_{2k}) \\ &= \frac{k!}{\mathbf{i}^{k+1}(2k+1)!}\sum_{i=0}^{2k}\mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}\Big(a_0F^2[F, a_1]\dots[F, a_i]\Delta^{-z/4}[F, a_{i+1}]\dots[F, a_{2k}] \otimes \frac{\omega^{n-k-1}}{n!}\Big) \end{aligned}$$

hence,

$$
\begin{aligned}
&(\widetilde{\phi}_{2k} - B\widetilde{\gamma}_{2k+1})(a_0, \dots, a_{2k}) \\
&= \frac{k!}{\mathbf{i}^{k+1}(2k+1)!} \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2k} \mathrm{Pf}_{z=0} \left((a_0 F^2 + F a_0 F)[F, a_1] \dots \Delta^{-z/4} \dots [F, a_{2k}] \otimes \frac{\omega^{n-k-1}}{n!} \right) \\
&= \frac{k!}{\mathbf{i}^{k+1}(2k+1)!} \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2k} \mathrm{Pf}_{z=0} \Bigg(a_0 F[F, a_1] \dots ((-1)^i F \Delta^{-z/4} - (-1)^{2k-i} \Delta^{-z/4} F) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dots [F, a_{2k}] \otimes \frac{\omega^{n-k-1}}{n!} \Bigg)
\end{aligned}
$$

Finally, we obtain

$$
\begin{aligned}
&(\widetilde{\phi}_{2k} - B\widetilde{\gamma}_{2k+1})(a_0, \dots, a_{2k}) \\
&\qquad = \frac{k!}{2\mathbf{i}^{k+1}(2k+1)!} \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i ⨍ \left(a_0 F[F, a_1] \dots \delta F \dots [F, a_{2k}] \otimes \frac{\omega^{n-k-1}}{n!} \right) \\
&\qquad = \gamma_{2k}(a_0, \dots, a_{2k})
\end{aligned}
$$

□

FORMULA (2.7). We now calculate $b\widetilde{\gamma}_{2k+1}$. Writing $a_1 F = -[F, a_1] + F a_1$ and using the derivation property of $[F, .]$,

$$
\begin{aligned}
&b\widetilde{\gamma}_{2k+1}(a_0, \dots, a_{2k+2}) \\
&= -\widetilde{\phi}_{2k+2}(a_0, \dots, a_{2k+2}) \\
&\quad + \frac{(k+1)!}{\mathbf{i}^{k+1}(2k+3)!} \Bigg[\mathrm{Pf}_{z=0} \left(a_0 [a_1, \Delta^{-z/4}][F, a_2] \dots [F, a_{2k+2}] \otimes \frac{\omega^{n-k-1}}{n!} \right) \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{2k+1} (-1)^i \mathrm{Pf}_{z=0} \left(a_0 F[F, a_1] \dots [a_{i+1}, \Delta^{-z/4}][F, a_2] \dots [F, a_{2k+2}] \otimes \frac{\omega^{n-k-1}}{n!} \right) \Bigg]
\end{aligned}
$$

Finally,

$$
\begin{aligned}
&(\widetilde{\phi}_{2k+2} + b\widetilde{\gamma}_{2k+1})(a_0, \dots, a_{2k+2}) \\
&\quad = \frac{(k+1)!}{\mathbf{i}^{k+1}(2k+3)!} \Bigg[⨍ \left(a_0 \delta a_1 [F, a_2] \dots [F, a_{2k+2}] \otimes \frac{\omega^{n-k-1}}{n!} \right) \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{2k+2} (-1)^{i-1} ⨍ \left(a_0 F[F, a_1] \dots \delta a_i \dots [F, a_{2k+2}] \otimes \frac{\omega^{n-k-1}}{n!} \right) \Bigg] \\
&\quad = \gamma_{2k+2}(a_0, \dots, a_{2k+2})
\end{aligned}
$$

□

6. Complements on Section 3

For the convenience of the reader, we recall here Quillen's picture of (B, b)-cocycles and how it is used to obtain Theorem 2.10 from the Bianchi identity of Lemma 2.8.

6.1. More on Quillen's formalism. Let $\mathcal{A}$ be an associative algebra over $\mathbb{C}$, and B be the bar construction of $\mathcal{A}$. Recall that Ω^B and $\Omega^{B,\natural}$ are the following bicomodules over B :

$$\Omega^B = B \otimes \mathcal{A} \otimes B, \quad \Omega^{B,\natural} = \mathcal{A} \otimes B$$

THEOREM 2.13. *One has a complex of period* 2

$$B \underset{\overline{\partial}}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} \Omega^{B,\natural}$$

with $\overline{\partial} = \partial\natural : \Omega^{B,\natural} \to B$, *where* $\natural : \Omega^{B,\natural} \to \Omega^B$, $\partial : \Omega^B \to B$, $\beta : B \to \Omega^{B,\natural}$ *are defined by the following formulas :*

$$\natural(a_1 \otimes (a_2, \dots, a_n)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i(n-1)} (a_{i+1}, \dots, a_n) \otimes a_1 \otimes (a_2, \dots, a_i)$$
$$\partial(a_1, \dots, a_{p-1}) \otimes a_p \otimes (a_{p+1}, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n)$$
$$\overline{\partial}(a_1 \otimes (a_2, \dots, a_n)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i(n-1)} (a_{i+1}, \dots, a_n, a_1, a_2, \dots, a_i)$$
$$\beta(a_1, \dots, a_n) = (-1)^{n-1} a_n \otimes (a_1, \dots, a_{n-1}) - a_1 \otimes (a_2, \dots, a_n)$$

As Quillen shows in [40], it turns out that the 2-periodic complex constructed above is exactly the Loday-Quillen cyclic bicomplex with degrees shifted by one, and is therefore equivalent to Connes (B, b)-bicomplex. The shift of the degrees makes that elements of the algebra $\mathcal{A}$ become odd in the bar construction, while they are even in the cyclic bicomplex.

Now, let L be a differential graded algebra. The maps $\overline{\partial}$ and β of the periodic complex induces maps from bar cochains to Hochschild cochains (with values in L) and conversely by pull-back. The following formula is a key step.

LEMMA 2.14. *Let* $f, g \in \mathrm{Hom}(B, L)$ *be bar cochains. Then, we have*

$$\beta(\tau^\natural(\partial f \cdot g)) = -\tau([f, g])$$

We carry a purely computational proof, because of the way we introduced Quillen's formalism. A more elegant and conceptual proof is given in Quillen's article [40], paragraph 5.2. The proof of this lemma is based on the following formula,

$$(\partial f \cdot g)\natural(a_1 \otimes (a_2, \dots, a_n)) = \sum_{n-p<i\leqslant n} (-1)^{i(n-1)} (f \cdot g)(a_{i+1}, \dots a_n, a_1, \dots, a_i) \tag{2.14}$$

where f and g be bar cochains of respective degrees p and $n - p$. The case $p = 1$ will be often used, so we give it :

$$(\partial f \cdot g)\natural(a_1 \otimes (a_2, \dots, a_n)) = (-1)^{|g|} f(a_1) g(a_2, \dots, a_n) \tag{2.15}$$

PROOF. Let f and g be bar cochains of respective degrees p and $n-p$. By definition, $\beta(\tau^\natural(\partial f\cdot g))=\tau(\partial f\cdot g)\natural\beta$, and using (2.14), so,

$$\begin{aligned}
&\beta(\tau^\natural(\partial f\cdot g))(a_1,\dots,a_n)\\
&=\tau(\partial f\cdot g)\natural(((-1)^{n-1}a_n\otimes(a_1,\dots,a_{n-1})-a_1\otimes(a_2,\dots,a_n))\\
&=\tau\left(\sum_{n-p<i\leqslant n}(-1)^{n-1}(-1)^{i(n-1)}(f\cdot g)(a_i,\dots a_n,a_1,\dots,a_{i-1})\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\sum_{n-p<i\leqslant n}(-1)^{i(n-1)}(f\cdot g)(a_{i+1},\dots a_n,a_1,\dots,a_i)\right)
\end{aligned}$$

The first sum of the last equality can be rewritten

$$\begin{aligned}
&\sum_{n-p<i\leqslant n}(-1)^{n-1}(-1)^{i(n-1)}(f\cdot g)(a_i,\dots a_n,a_1,\dots,a_{i-1})\\
&\qquad\qquad=\sum_{n-p-1<i\leqslant n-1}(-1)^{i(n-1)}(f\cdot g)(a_{i+1},\dots a_n,a_1,\dots,a_i)
\end{aligned}$$

and noting that $(-1)^{n(n-1)}=1$, we obtain

$$\begin{aligned}
&\beta(\tau^\natural(\partial f\cdot g))(a_1,\dots,a_n)\\
&=\tau((-1)^{(n-p)(n-1)}(f\cdot g)(a_{n-p+1},\dots,a_n,a_1,\dots,a_{n-p})-(f\cdot g)(a_1,\dots,a_n))\\
&=\tau((-1)^{(n-p)(n-1)}(-1)^{p|g|}f(a_{n-p+1},\dots,a_n)g(a_1,\dots,a_{n-p})-(f\cdot g)(a_1,\dots,a_n))\\
&=\tau((-1)^{(n-p)(n-1)}(-1)^{p|g|}(-1)^{(|f|+p)(|g|+n-p)}g(a_1,\dots,a_{n-p})f(a_{n-p+1},\dots,a_n)\\
&\qquad\qquad-(f\cdot g)(a_1,\dots,a_n))\\
&=\tau((-1)^{(n-p)(n-p-1)}(-1)^{|f|\cdot|g|}(g\cdot f)(a_1,\dots,a_{n-p},a_{n-p+1},\dots,a_n)\\
&\qquad\qquad-(f\cdot g)(a_1,\dots,a_n))
\end{aligned}$$

where we used the (graded) trace property of τ in the third equality.

As we have $(-1)^{(n-p)(n-p-1)}=1$, this yields the result. □

We can now give Quillen's picture of (B,b)-cocycles.

THEOREM 2.15. *Let $\theta\in\mathrm{Hom}(\Omega^{B,\natural},\mathbb{C})$ be a Hochschild cochain, and $\eta\in\mathrm{Hom}(B,\mathbb{C})$ be the bar cochain defined by*

$$\eta_k(a_1,\dots,a_k)=\theta(1,a_1,\dots,a_k)$$

Suppose that for each k, we have

$$\delta_{\mathrm{bar}}\eta_k=(-1)^k\beta\theta_{k+1},\quad \delta_{\mathrm{bar}}\theta_{k+1}=(-1)^k\overline{\partial}\eta_{k+2}$$

and that in addition, $\theta_{n+1}(a_0,a_1,\dots,a_n)=0$ if $a_i=1$ for at least one $i\geqslant 1$.

Then, for all k, $B\theta_{k+1}=b\theta_{k-1}$.

REMARK 2.16. This means that if we redefine signs correctly in θ, we obtain a (B,b)-cocycle in our sign conventions.

6.2. Complements on Remark 2.9. We give here the details of Quillen's arguments. The only thing we have done towards the original paper [40] is to mix the arguments of Sections 7 and 8.

LEMMA 2.17. (Bianchi identity.) *We have* $(\delta_{\text{bar}} + \text{ad}\,\rho + \text{ad}\,\nabla)K = (\delta_{\text{bar}} + \text{ad}\,\rho + \text{ad}\,\nabla)e^K = 0$, *where* ad *denotes the (graded) adjoint action.*

PROOF. Let D be the derivation $\delta_{\text{bar}} + \text{ad}\,\rho + \text{ad}\,\nabla$. It suffices to check that $D(K) = 0$, the other equality will follow in virtue of the differentiation formula

$$D(e^K) = \int_0^1 e^{(1-s)K} D(K) e^{sK} ds$$

We first remark that $[\nabla, \nabla^2] = 0$, using that κ commutes (in the graded sense) with elements of $\text{Hom}(B, L)$ and that $\kappa^2 = 0$. Furthermore $\delta_{\text{bar}}\nabla^2 = 0$ since δ_{bar} vanishes on 0-cochains. Therefore,

$$\begin{aligned} D(K) &= (\delta_{\text{bar}} + \text{ad}\,\rho + \text{ad}\,\nabla)(\nabla^2 + [\nabla, \rho]) \\ &= \delta_{\text{bar}}[\nabla, \rho] + [\rho, [\nabla, \rho]] + [\rho, \nabla^2] + [\nabla, [\nabla, \rho]] \\ &= [\nabla, \rho^2] + \rho[\nabla, \rho] - [\nabla, \rho]\rho + [\rho, \nabla^2] + [\nabla^2, \rho] \\ &= 0 \end{aligned}$$

The result is proved. □

According to Theorem 2.15, let us define the bar cochain $\eta \in \text{Hom}(B, \mathbb{C})$:

$$\eta_{2k-1}(a_1, \ldots, a_{2k-1}) = \theta_{2k}(1, a_1, \ldots, a_{2k+1})$$

Also remark that $\eta = \tau(e^K)$.

PROPOSITION 2.18. *The bar and Hochschild cochains* η *and* θ *satisfies the relations*

$$\delta_{\text{bar}}\eta = \pm\beta\theta, \quad \delta_{\text{bar}}\theta = \pm\bar{\partial}\eta$$

The $\pm$ *means that the sign is positive in the even case and negative in the odd case.*

PROOF. For the first formula of the proposition, we have

$$\delta_{\text{bar}}\eta = \delta_{\text{bar}}(\tau(e^K)) = \tau(\delta_{\text{bar}}e^K) = \tau(\delta_{\text{bar}}e^K + [\nabla, e^K]) = -\tau([\rho, e^K]) = \pm\beta(\tau^\natural(\partial\rho \cdot e^K))$$

The second equality uses the trace property of τ, the third is the Bianchi identity of the lemma above, and the last one is Lemma 2.14.

For the second formula, first recall that $\delta_{\text{bar}}\rho + \rho^2 = 0$. Then, one has :

$$\begin{array}{rlcl} & \delta_{\text{bar}}(\tau^\natural(\partial\rho \cdot e^K)) & = & \tau^\natural(\partial(-\rho^2)e^K - \partial\rho \cdot \delta_{\text{bar}}e^K) \\ 0 = & \tau^\natural([\rho, \partial\rho \cdot e^K]) & = & \tau^\natural((\rho \cdot \partial\rho + \partial\rho \cdot \rho)e^K - \partial\rho \cdot [\rho, e^K]) \\ 0 = & \tau^\natural([\nabla, \partial\rho \cdot e^K]) & = & \tau^\natural(\partial[\nabla, \rho]e^K - \partial\rho \cdot [\nabla, e^K]) \end{array}$$

Adding these three equations, using Bianchi identity and $\delta_{\text{bar}}\rho + \rho^2 = 0$ yields

$$\delta_{\text{bar}}(\tau^\natural(\partial\rho \cdot e^K)) = \tau^\natural(\partial[\nabla, \rho]e^K) = \tau^\natural(\partial K \cdot e^K)$$

The last equality follows from the definition of K. Moreover,

$$\bar{\partial}\tau(e^K) = \tau^\natural(\partial e^K) = \int_0^1 \tau^\natural(e^{(1-t)K} \cdot \partial K \cdot e^{tK})dt = \tau^\natural(\partial K \cdot e^K)$$

where last equality stands because of the trace property. This concludes the proof. □

Therefore, Theorem 2.15 shows that θ gives rise to a (B, b)-cocycle (up to changing signs). The same arguments may be used to complete the proof of Theorem 2.10.

Chapitre 3

Equivariant index theorem for H-elliptic operators on foliations

This chapter extends the index formula obtained in the previous one to a general situation. More precisely, let M be a foliated manifold and G be a discrete group acting on M by diffeomorphism preserving the leaves of the foliation. Our index theorem then concerns H-elliptic operators in the crossed-product $\Psi_{H,c}(M) \rtimes G$. The strategy used follows the same line as that of the previous chapter. However, we shall need a formalism of operators on symbols developed by Perrot in [36] and [37] to achieve our goal. Also, many constructions involve the X-complex of Cuntz-Quillen.

As a special case, we get the solution of the problem of Connes and Moscovici recalled in Introduction, at the very end of Section 2.4.

REMARK 3.1. Throughout the chapter, we shall use Einstein summation notation for repeated indices.

1. Background on Cuntz-Quillen's X-complex

We first recall some background on Cuntz-Quillen's X-complex introduced first in [40], and developed in [13].

Let $\mathcal{R}$ be an associative algebra. The X-*complex* $X(\mathcal{R})$ of $\mathcal{R}$ is the 2-periodic complex

$$X(\mathcal{R}) : \mathcal{R} \underset{\bar{b}}{\overset{\natural\mathbf{d}}{\rightleftarrows}} \Omega^1\mathcal{R}_\natural$$

where $\Omega^1\mathcal{R}_\natural = \Omega^1\mathcal{R}/b(\Omega^2\mathcal{R}) = \Omega^1\mathcal{R}/[\mathcal{R}, \Omega^1\mathcal{R}]$, $\natural : \Omega^1\mathcal{R} \to \Omega^1\mathcal{R}_\natural$ is the quotient map and $\bar{b}$ is the map induced by the Hochschild boundary, which is well-defined since b obviously vanishes on $b(\Omega^2\mathcal{R})$. The class of an element $x_0\mathbf{d}x_1 \in \Omega^1(\mathcal{R})$ is denoted $\natural x_0\mathbf{d}x_1$. One has $\natural\mathbf{d} \circ \overline{b} = \overline{b} \circ \natural\mathbf{d} = 0$, we may consider the total complex of $X(\mathcal{R})$ endowed with the differential $\natural\mathbf{d} \oplus \overline{b}$.

The X-complex $X(\mathcal{R})$ is actually a quotient of the (B, b)-complex (in homology) of $\mathcal{R}$ by its subcomplex

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "b"] \\
\dots & \Omega^2\mathcal{R} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & b(\Omega^2\mathcal{R}) \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & 0 \arrow[l, "B"'] \\
\dots & b(\Omega^2\mathcal{R}) \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & 0 \arrow[l, "B"'] & \\
\dots & 0 \arrow[l, "B"'] & &
\end{tikzcd}$$

In other words, the X-complex is obtained from the lowest levels of the (B, b)-bicomplex. At first sight, we only have a first order approximation of the (B, b)-complex, but one can actually recover completely the periodic cyclic (co)homology.

To achieve this, the idea is to apply this to the pro-algebra $\widehat{T}\mathcal{A}$, where

$$\widehat{T}\mathcal{A} = \varprojlim_n T\mathcal{A}/(J\mathcal{A})^n,$$

is the completion of the non-unital tensor algebra $T\mathcal{A}$ of $\mathcal{A}$, and $J\mathcal{A}$ the ideal of $T\mathcal{A}$ in the universal extension

$$0 \longrightarrow J\mathcal{A} \longrightarrow T\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

the map $T\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ being the multiplication homomorphism. This extension is universal in the sense that any extension of $\mathcal{A}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

gives rise to a classifying homomorphism $T\mathcal{A} \to \mathcal{E}$, unique up to homotopy, which restricts to a homomorphism $J\mathcal{A} \to \mathcal{I}$. The construction of the classifying homomorphism is the following : one first choose a linear splitting $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$, which extends to a homomorphism $\sigma_* : T\mathcal{A} \to \mathcal{E}$, by the universal property of $T\mathcal{A}$. The homomorphism σ_* is defined by

$$\sigma_*(a_1 \otimes \ldots \otimes a_k) = \sigma(a_0 \ldots a_k)$$

Since σ is multiplicative modulo $\mathcal{I}$, the restriction of σ_* to $J\mathcal{A}$ precisely maps into $\mathcal{I}$, hence, getting the following morphism of extensions. More precisely

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_*"'] & T\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_*"'] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dotted, "\sigma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I} \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

The X-complex of $\widehat{T}\mathcal{A}$ is then defined as the pro-complex :

$$X(\widehat{T}\mathcal{A}) = \varprojlim_n X\big(T\mathcal{A}/(J\mathcal{A})^n\big)$$

Then, let us recall how to relate the X-complex to the (B, b)-bicomplex in homology of an algebra $\mathcal{A}$. This will be useful later.

THEOREM 3.2. (Cuntz - Quillen, [13]) *We have the following*

(i) *We endow $\Omega^{even}\mathcal{A}$ with the* Fedosov product

$$\omega_1 \odot \omega_2 = \omega_1\omega_2 + (-1)^{\deg(\omega_1)}\mathbf{d}\omega_1\mathbf{d}\omega_2.$$

Then, the map

$$\Omega^{even}\mathcal{A} \longrightarrow T\mathcal{A}, \qquad a_0\mathbf{d}a_1 \ldots \mathbf{d}a_{2k} \longmapsto a_0\omega(a_1, a_2) \ldots \omega(a_{2k-1}, a_{2k})$$

where ω is the curvature defined by $\omega(a_i, a_j) = a_i a_j - a_i \otimes a_j$, is an isomorphism of algebras.

(ii) *The map*

$$\Omega^{odd}\mathcal{A} \longrightarrow \Omega^1_\natural\mathcal{A}, \qquad a_0\mathbf{d}a_1 \ldots \mathbf{d}a_{2k+1} \longmapsto \natural\big(a_0\omega(a_1, a_2) \ldots \omega(a_{2k-1}, a_{2k})\big)\mathbf{d}a_{2k+1}$$

is a linear isomorphism.

The X-complex of $T\mathcal{A}$ is then isomorphic to a $\mathbb{Z}_2$-graded complex of the form

$$\Omega^{\text{even}}\mathcal{A} \rightleftarrows \Omega^{\text{odd}}\mathcal{A}$$

where the arrows are explicitely determined by Cuntz and Quillen. It turns out that modulo some chain homotopy equivalence and a rescaling factor, the total differential of this complex is $(B+b)$. This equivalence also descends to the completion (this is not obvious at all), leading to the following theorem.

THEOREM 3.3. (Cuntz - Quillen, [13]) *Denote the completions of* $\Omega\mathcal{A}$ *and* $X(T\mathcal{A})$ *by*

$$\widehat{\Omega}\mathcal{A} = \prod_{k\geqslant 0} \Omega\mathcal{A}, \quad \widehat{T}\mathcal{A} = \varprojlim_n T\mathcal{A}/(J\mathcal{A})^n$$

and recall that

$$X(\widehat{T}\mathcal{A}) = \varprojlim_n X\big(T\mathcal{A}/(J\mathcal{A})^n\big)$$

Then, we have

$$HP_\bullet(\mathcal{A}) = H_\bullet(\widehat{\Omega}\mathcal{A}) \simeq H_\bullet(X(\widehat{T}\mathcal{A}))$$

where the differential on $\widehat{\Omega}\mathcal{A}$ *is* $B+b$. *The periodic cyclic cohomology is obtained by taking the (continuous for the filtration) dual complexes :*

$$HP^\bullet(\mathcal{A}) = H^\bullet((\widehat{\Omega}\mathcal{A})') \simeq H^\bullet((X(\widehat{T}\mathcal{A})')$$

IMPORTANT REMARK. Actually, if we replace $T\mathcal{A}$ by any quasi-free extension $\mathcal{R}$ of $\mathcal{A}$, we have a chain homotopy equivalence $\Omega\mathcal{A} \sim X(T\mathcal{A}) \sim X(\mathcal{R})$, which descends to the completions (cf. [13], Cuntz's article in [15], Section 2.5). In particular, $T(T\mathcal{A})$ is quasi-free, hence

$$\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathcal{A} \sim X(\widehat{T}\mathcal{A})$$

In other words, we may also use the (B,b)-complex of $\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathcal{A}$ (seen as a pro-complex) to compute the cyclic homology of $\mathcal{A}$. This will be important for us in the sequel. In particular, we have the *generalized Goodwillie theorem*, which states that the periodic cyclic cohomology of $\mathcal{A}$ may be computed as the periodic cyclic cohomology of its completed tensor algebra $\widehat{T}\mathcal{A}$.

The generalized Goodwillie theorem will be convenient to represent cocycles arising from excision as cocycles over the completed tensor algebra. More precisely, let

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

be an extension, and return to the homomorphism of extensions that the universal tensor algebra extension of $\mathcal{A}$ yields :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_*"'] & T\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_*"'] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dotted, "\sigma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I} \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

where σ is a linear lifting and σ_* its induced classifying map. For example, let $[\tau] \in HP^0(\mathcal{I})$, represented by a trace. Recall that a representative of its image $\partial[\tau] \in HP^1(\mathcal{A})$ by excision is given by first choosing a linear lift $\tau_R : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ of τ with $\tau([\mathcal{A},\mathcal{I}]) = 0$. Then, $b\tau_R$ represents $\partial[\tau]$. We have the following :

PROPOSITION 3.4. $\partial[\tau] \in HP^1(\mathcal{A})$ *is represented by the cocycle* $b\tau_R \circ \sigma_*$ *over* $\widehat{T}\mathcal{A}$

For a proof, and a more general account of this, see [35], Corollary 2.6.

To finish the section, we recall things on bivariant cyclic theory. Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be associative algebras over $\mathbb{C}$. The *bivariant periodic cyclic homology* $HP_\bullet(\mathcal{A},\mathcal{B})$ is the homology of the Hom-complex $\mathrm{Hom}(\widehat{\Omega}\mathcal{A},\widehat{\Omega}\mathcal{B})$ defined as,

$$\mathrm{Hom}(\widehat{\Omega}\mathcal{A},\widehat{\Omega}\mathcal{B}) = \varprojlim_m \varinjlim_n \mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{i\leqslant n}\Omega^i\mathcal{A},\bigoplus_{j\leqslant m}\Omega^j\mathcal{B}\right)$$

with boundary given, for $\phi \in \mathrm{Hom}(\widehat{\Omega}\mathcal{A},\widehat{\Omega}\mathcal{B})$, by

$$\phi\circ(B+b)-(-1)^{\deg(\phi)}(B+b)\circ\phi$$

Therefore, $HP_\bullet(\mathbb{C},\mathcal{B}) = HP_\bullet(\mathcal{B})$ and $HP^\bullet(\mathcal{A},\mathbb{C}) = HP^\bullet(\mathcal{A})$. Moreover, if $\mathcal{C}$ is another algebra, there is an obvious product

$$HP_i(\mathcal{A},\mathcal{B})\times HP_j(\mathcal{B},\mathcal{C}) = HP_{i+j}(\mathcal{A},\mathcal{B})$$

induced by the composition.

One important thing is that we still obtain bivariant cyclic homology if $\widehat{\Omega}\mathcal{A}$ or $\widehat{\Omega}\mathcal{B}$ are replaced by the X-complex of $\widehat{T}\mathcal{A}$ or $\widehat{T}\mathcal{B}$, and the appropriate $(B+b)$ by the X-complex boundary $(\natural\mathbf{d}\oplus\overline{b})$. As we shall see, this combines very well with the cochain theory of Quillen used in the preceding chapter (which is actually the X-*complex for coalgebras*). Conceptually, the cocycles we need to achive our index theorem will be built from superconnections acting on things like $\mathrm{Hom}(\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathcal{A},X(\mathcal{B}))$.

2. Excision and equivariant residue index formula

Let (M,V) be a foliation, where $V\subset TM$ be the integrable sub-bundle defining the foliated structure. Consider a discrete subgroup $G\subset \mathrm{Diff}(M)$ of diffeomorphisms preserving the leaves of the foliation. By convention we suppose that G acts from the right, so, for every $g\in G$ the induced linear action U_g on the space of functions $C^\infty(M)$ reads

$$(U_gf)(x) = f(x\cdot g)\ ,\quad \forall f\in C^\infty(M)\ ,\ x\in M$$

where $x\cdot g = g(x)$. Recall that the *algebraic crossed product* $\Psi_{H,c}(M)\rtimes G$ is the universal algebra generated by Heisenberg pseudodifferential operators and group elements, that is,

$$\Psi_{H,c}(M)\rtimes G = \left\{\sum_{g\in G} P_g\otimes U_g\ ;\ P_g\in\Psi_{H,c}(M)\right\}$$

and the sum only contains a finite number of non-zero terms. The multiplication is given by the rule

$$(P\otimes U_g)\cdot(Q\otimes U_h) = P(U_gQU_{g^{-1}})\otimes U_{gh}$$

To this effect, remark that $U_gQU_{g^{-1}}$ is still a classical Heisenberg pseudodifferential operator, so that the product makes sense. Note also that in general, the representation of $\Psi_{H,c}(M)\rtimes G$ as linear operators on $C^\infty_c(M)$ does not yield pseudodifferential operators, but belongs to the larger class of *Fourier integral operators*.

Then, one has a *pseudodifferential extension*

$$0\longrightarrow\Psi_c^{-\infty}(M)\rtimes G\longrightarrow\Psi^0_{H,c}(M)\rtimes G\longrightarrow S^0_{H,c}(M)\rtimes G\longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

The usual trace on the algebra of regularizing operators $\Psi_c^{-\infty}(M)$, given by

$$\mathrm{Tr}(K) = \int_M k(x,x)\mathrm{dvol}(x)$$

where k stands for the kernel of K, extends to a trace $\mathrm{Tr}_{[1]}$ on $\Psi_c^{-\infty}(M) \rtimes G$ by *localization at the unit* of G

$$\mathrm{Tr}_{[1]}\left(\sum_{g\in G} K_g \otimes U_g\right) = \mathrm{Tr}(K_1)$$

That $\mathrm{Tr}_{[1]}$ still remains a trace only comes from the invariance of the ordinary operator trace Tr under conjugation by U_g, which is easy to verify.

Likewise, the Connes-Moscovici residue on $S_{H,c}(M)$ extends to a trace on $S_{H,c}(M) \rtimes G$ by localization at the unit.

Let $\partial : HP^0(\Psi_c^{-\infty}(M) \rtimes G) \to HP^1(S^0_{H,c}(M) \rtimes G)$ be the induced excision map in cohomology. We shall now compute $\partial[\mathrm{Tr}_{[1]}]$. For this, we lift $\mathrm{Tr}_{[1]}$ on $\Psi_c^{-\infty}(M) \rtimes G$ to a linear map on $\Psi^0_{H,c}(M) \rtimes G$ using again a zeta function renormalization

$$\mathrm{Tr}'_{[1]}\left(\sum_{g\in G} P_g \otimes U_g\right) = \mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}\left(P_1 \cdot \Delta^{-z/4}\right)$$

where Δ is a sub-elliptic sub-laplacian. Then, $\partial[\mathrm{Tr}_{[1]}]$ is represented in $HP^1(S^0_{H,c}(M) \rtimes G)$ by the following cyclic 1-cocycle :

$$\phi(a \otimes U_g, b \otimes U_{g^{-1}}) = \mathrm{Tr}'_{[1]}([aU_g, bU_{g^{-1}}]) = \mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}\left([aU_g, bU_{g^{-1}}] \cdot \Delta^{-z/4}\right)$$

The formula can be made a little more explicit if we gather accurately the relevant terms, as we did in Chapter 1. Though, we have to be careful as we now work with a crossed product. This is the object of the following proposition.

THEOREM 3.5. *The cyclic 1-cocycle ϕ given above is given in terms of the Connes-Moscovici residue*

$$\phi(a \otimes U_g, b \otimes U_{g^{-1}}) = ⨍ aU_g[\log \Delta^{1/4}, bU_{g^{-1}}]$$

PROOF. First, remark that

$$\begin{aligned}\phi(a \otimes U_g, b \otimes U_{g^{-1}}) &= \mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}\left([aU_g, bU_{g^{-1}}] \cdot \Delta^{-z/4}\right)\\ &= \mathrm{Res}_{z=0}\frac{1}{z}\mathrm{Tr}\left((aU_g bU_{g^{-1}} - bU_{g^{-1}})aU_g \cdot \Delta^{-z/4}\right)\end{aligned}$$

Then, work at $z \in \mathbb{C}$ with $\mathrm{Re}(z) \gg 0$, so that $\mathrm{Tr}\left([aU_g, bU_{g^{-1}}] \cdot \Delta^{-z/4}\right)$ is well-defined. Then, the trace property yields

$$\mathrm{Tr}\left([aU_g, bU_{g^{-1}}] \cdot \Delta^{-z/4}\right) = \mathrm{Tr}\left(a(U_g bU_{g^{-1}}\Delta^{-z/4} - U_g\Delta^{-z/4}bU_{g^{-1}})\right)$$

Now, we write

$$\begin{aligned}U_g bU_{g^{-1}}\Delta^{-z/4} - U_g\Delta^{-z/4}bU_{g^{-1}} &= U_g bU_{g^{-1}}\Delta^{-z/4} - U_g b\Delta^{-z/4}U_{g^{-1}} - U_g[\Delta^{-z/4}, b]U_{g^{-1}}\\ &= -U_g[\Delta^{-z/4}, b]U_{g^{-1}} + U_g bU_{g^{-1}}[\Delta^{-z/4}, U_g]U_{g^{-1}}\end{aligned}$$

To end the calculations, we use the Connes-Moscovici trick of Lemma 1.11.

$$[\Delta^{-z}, b] \sim \sum_{k\geqslant 1}\binom{-z}{k} b^{(k)}\Delta^{-z-k} \qquad U_{g^{-1}}[\Delta^{-z}, U_g] \sim \sum_{k\geqslant 1}\binom{-z}{k} U_{g^{-1}}U_g^{(k)}\Delta^{-z-k}$$

where we denote $T^{(k)} = \mathrm{ad}(\Delta)^k(T)$, $\mathrm{ad}(\Delta) = [\Delta, .]$. Moreover, note that for every integer $k \geqslant 1$, $b^{(k)}$ and $U_{g^{-1}}U_g^{(k)}$ are classical Heisenberg pseudodifferential operators whose order stricly decrease as k grows, So, evaluating the expression under the trace, Theorem 21 may be used. On the one hand, we deduce that the sums

$$\mathrm{Res}_{z=0}\frac{1}{z}\sum_{k\geqslant 1}\mathrm{Tr}\left(a\cdot U_g\binom{-z/4}{k}b^{(k)}\Delta^{-z/4-k}U_{g^{-1}}\right)$$
$$\mathrm{Res}_{z=0}\frac{1}{z}\sum_{k\geqslant 1}\mathrm{Tr}\left(a\cdot\binom{-z/4}{k}U_{g^{-1}}U_g^{(k)}\Delta^{-z/4-k}\right)$$

are finite, since the zeta function is holomorphic on a half-plane $\mathrm{Re}(z)\gg 0$. On the other hand, as the poles of the zeta function are simple, the terms carrying a power of z^2 vanish under the residue, and we are respectively left with

$$-\mathrm{Res}_{z=0}\sum_{k\geqslant 1}\mathrm{Tr}\left(a\cdot U_g\frac{(-1)^{k-1}}{4k}b^{(k)}\Delta^{-z/4-k}U_{g^{-1}}\right)$$
$$-\mathrm{Res}_{z=0}\sum_{k\geqslant 1}\mathrm{Tr}\left(a\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{4k}U_{g^{-1}}U_g^{(k)}\Delta^{-z/4-k}\right)$$

We then recognize the commutator with the logarithm of $\Delta^{1/4}$ defined in (1.3), and we finally obtain

$$\begin{aligned}\phi(a\otimes U_g, b\otimes U_{g^{-1}}) &= ⨍ a\left(U_g[\log\Delta^{1/4},b]U_{g^{-1}} - U_g b U_{g^{-1}}[\log\Delta^{1/4},U_g]U_{g^{-1}}\right)\\ &= ⨍ aU_g[\log\Delta^{1/4},bU_{g^{-1}}]\end{aligned}$$

This ends the proof of the proposition. □

The pseudodifferential extension (3.1) is closely related to another extension. Indeed the quotient of $\Psi^0_{H,c}(M)$ by its two-sided ideal $\Psi^{-1}_{H,c}(M)$ of operators of order $\leqslant -1$ is G-equivariantly isomorphic to the commutative algebra of leading symbols $C^\infty_c(S^*_H M)$. The natural inclusion of smoothing operators in $\Psi^{-1}_{H,c}(M)$ and the leading symbol map thus yield a morphism of extensions

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Psi^{-\infty}_c(M)\rtimes G & \longrightarrow & \Psi^0_{H,c}(M)\rtimes G & \longrightarrow & \mathcal{S}^0_{H,c}(M)\rtimes G & \longrightarrow & 0\\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Psi^{-1}_{H,c}(M)\rtimes G & \longrightarrow & \Psi^0_{H,c}(M)\rtimes G & \longrightarrow & C^\infty_c(S^*_H M)\rtimes G & \longrightarrow & 0\end{array}$$

The cyclic cohomology class of the operator trace $\mathrm{Tr}_{[1]}$ localized at unit extends in a straightforward manner to a cyclic cohomology class $[\tau]\in HP^0(\Psi^{-1}_{H,c}(M)\rtimes G)$. The latter is represented, for any choice of even integer $k>\nu+2h$, by the cyclic k-cocycle τ_k defined as follows :

$$\tau_k(x_0,\dots,x_k)=\mathrm{Tr}_{[1]}(x_0\dots x_k)$$

for every $x_i\in\Psi^{-1}_{H,c}(M)\rtimes G$. By naturality of excision, the class $\partial[\mathrm{Tr}_{[1]}]\in HP^1(\mathcal{S}^0_{H,c}(M)\rtimes G)$ is the pullback of $\partial[\tau]\in HP^1(C^\infty_c(S^*_H M)\rtimes G)$ under the leading symbol homomorphism. Now the computation of $\partial[\tau]$ is fairly analogous to the above computation of $\partial[\mathrm{Tr}_{[1]}]$. We use the generalized Goodwillie theorem of Cuntz and Quillen to represent $\partial[\tau]$ as a cocycle over the completed tensor algebra

$$\widehat{T}\mathcal{A}=\varprojlim_n T\mathcal{A}/(J\mathcal{A})^n\ ,$$

where the two-sided ideal $J\mathcal{A}\subset T\mathcal{A}$ is the kernel of the multiplication homomorphism $T\mathcal{A}\to\mathcal{A}$. We let $\mathcal{A}=C^\infty_c(S^*_H M)\rtimes G$ and choose any linear splitting $\sigma:\mathcal{A}\to\Psi^0_{H,c}(M)\rtimes G$ of the leading symbol homomorphism. σ is multiplicative up to the ideal $\Psi^{-1}_{H,c}(M)\rtimes G$. By the universal property of the tensor algebra, σ extends to an homomorphism $\sigma_* : T\mathcal{A} \to \Psi^0_H(M) \rtimes G$ respecting the ideals, whence a morphism of extensions

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_*"'] & T\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_*"'] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dotted, "\sigma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Psi^{-1}_{H,c}(M) \rtimes G \arrow[r] & \Psi^0_{H,c}(M) \rtimes G \arrow[r] & C^\infty_c(S^*_H M) \rtimes G \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Observe that the cocycle of Proposition 3.5, viewed as a cyclic 1-cocycle over $\Psi^0_{H,c}(M) \rtimes G$, vanishes on the large powers of the ideal $\Psi^{-1}_{H,c}(M) \rtimes G$ because it involves the Connes-Moscovici residue. Hence the composite $\phi \circ \sigma_*$, which is a bilinear form on $T\mathcal{A}$, extends to a cyclic 1-cocycle over $\widehat{T}\mathcal{A}$. By Proposition 3.4, we obtain the following.

PROPOSITION 3.6. *Let $0 \to \Psi^{-1}_H(M) \rtimes G \to \Psi^0_H(M) \rtimes G \to C^\infty(S^*_H M) \rtimes G \to 0$ be the fundamental extension in the Heisenberg pseudodifferential calculus. Then the image $\partial[\tau]$ of the canonical trace localized at units under the excision map $\partial : HP^0(\Psi^{-1}_{H,c}(M) \rtimes G) \to HP^1(C^\infty_c(S^*_H M) \rtimes G)$ is represented by a cyclic 1-cocycle over the completed tensor algebra of $\mathcal{A} = C^\infty_c(S^*_H M) \rtimes G$,*

$$(\phi \circ \sigma_*)(\hat{a}_0, \hat{a}_1) = -\!\!\!\!\!\!\int \sigma(\hat{a}_0)[\log \Delta^{1/4}, \sigma(\hat{a}_1)]\,, \qquad \forall\, \hat{a}_0, \hat{a}_1 \in \widehat{T}\mathcal{A}\,,$$

for any choice of sub-Laplacian Δ and linear splitting $\sigma : \mathcal{A} \to \Psi^0_{H,c}(M) \rtimes G$.

We shall now develop the strategy sketched in Introduction, Section 3.3.

3. Bimodule of Heisenberg formal symbols

We adapt the framework developed in [36] to Heisenberg calculus on foliations. When the proof of a result is deferred to this paper, this means that it applies ad verbatim in our case. We shall mainly focus on the changes which occurs in the Heisenberg setting.

Let (M, V) be a foliated manifold of dimension n, where $V \subset TM$ is the sub-bundle of rank ν defining the foliation, and let h denote the codimension of the foliation.

Now, we shall be interested in operators acting on sections of a ($\mathbb{Z}_2$-graded) complex vector bundle. For such a bundle E over $\mathbb{C}$, one defines in the same way the algebra of Heisenberg pseudodifferential operators $\Psi_H(M, E)$ acting on the smooth compactly-supported sections $C^\infty_c(M, E)$ of E. One always has an exact sequence

$$0 \longrightarrow \Psi^{-\infty}_c(M, E) \longrightarrow \Psi_H(M, E) \longrightarrow \mathcal{S}_H(M, E) \longrightarrow 0$$

and similarly for the algebra of compactly-supported operators $\Psi_{H,c}(M, E)$. Note that for $a \in \mathcal{S}_H(M, E)$, $(x, \xi) \in T^*_x M$, we have $a(x, \xi) \in \mathrm{End}(E_x)$. Let $\mathcal{PS}_H(M, E) \subset \mathcal{S}_H(M, E)$ denote the subalgebra of polynomial Heisenberg symbols (with respect to the cotangent coordinate ξ). The latter is isomorphic to the algebra of differential operators, endowed with the Heisenberg degree.

The vector bundle of interest in this paper will be the exterior algebra $E = \Lambda^\bullet(T^*M \otimes \mathbb{C})$ of the complexified cotangent bundle. In a foliated coordinate system $(x^1, \ldots, x^n)$ over a chart of $U \subset M$, a local basis of E is given by

$$\left\{1, dx^{i_1}, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}, \ldots, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}\right\}_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant n}$$

Moreover, the endomorphisms $\mathrm{End}(E_x)$ of the fibre E_x are generated by

$$\psi^i = dx^i \wedge \cdot, \quad \overline{\psi}_i = \iota(\partial_{x^i}) \tag{3.2}$$

for $i = 1, \dots, n$, where ι stands for the interior product with a vector field. We have the following *anti-commutation relations rules* :

$$[\psi^i, \overline{\psi}_j] = \delta_i^j, \quad [\psi^i, \psi^j] = [\overline{\psi}_i, \overline{\psi}_j] = 0 \tag{3.3}$$

In other words, E_x is the Clifford algebra of $T_xM \oplus T_x^*M$, the metric is the duality bracket. Let us also recall the commutation relations of symbols : in the coordinate system (x, ξ) over T^*U, we have :

$$[x^i, \xi_j] = -\mathbf{i}\delta_i^j, \quad [x^i, x^j] = [\xi_i, \xi_j] = 0 \tag{3.4}$$

Thus, every element $a \in \mathcal{S}_H(M, E)$ locally reads

$$a(x, \xi, \psi, \overline{\psi}) = \sum_{j=0} a_{m-j}(x, \xi, \psi, \overline{\psi})$$

where the a_{m-j} are polynomial in the variables ψ and $\overline{\psi}$.

Let

$$\Pi = \overline{\psi}_1\psi^1 \dots \overline{\psi}_n\psi^n \tag{3.5}$$

be the Clifford section corresponding to the projection of the space of differential forms $\Omega^\bullet(M)$ onto the space of 0-forms $\Omega^0(M)$. A (graded) trace tr_s is defined on E as follows : it is zero on the polynomials $\psi^\eta\overline{\psi}^\theta$ which are not of the highest weight, and if

$$\mathrm{tr}_s(\Pi) = 1$$

An equivalent normalization is $\mathrm{tr}_s(\overline{\psi}_1\psi^1 \dots \overline{\psi}_n\psi^n) = (-1)^n$

REMARK 3.7. The setting of Chapter 2 is somewhat the flat case of the one given here. The exterior algebra of $T^*\mathbb{R}^n$ in the first is now replaced by a Clifford algebra. Then, one should really think of $\overline{\psi}$ as $d\xi$ for the future calculations : Recall that in the flat case, the role of $d\xi_1 \dots d\xi_n$ was to catch the symbol of order $-(\nu + 2h)$, to calculate the Connes-Moscovici residue at the level of the leading symbol (cf. Chapter 2, Section 4). As we shall see, $(\overline{\psi}_1 \dots \overline{\psi}_n)_R$ has the same use (cf. below for the notation $_R$).

We consider the $\mathbb{Z}_2$-graded algebra of formal Heisenberg symbols $\mathcal{S}_H(M, E)$, with $E = \Lambda^\bullet T_{\mathbb{C}}^*M$. This is left $\mathcal{S}_H(M, E)$-module and right $\mathcal{PS}_H(M, E)$-module : the left action of $a \in \mathcal{S}_H(M, E)$ and the right action $b \in \mathcal{PS}_H(M, E)$ on $c \in \mathcal{S}_H(M, E)$ are given by

$$(a_L b_R) \cdot \xi = \pm acb$$

Here, the sign $\pm$ depends on the parity of b and c : it is $-$ when both are odd and $+$ otherwise. This action defines a $\mathbb{Z}_2$-graded subalgebra of $\mathrm{End}(\mathcal{S}_H(M, E))$

$$\mathcal{L}(M) = \mathrm{span}\{a_L b_L \,;\, a \in \mathcal{S}_H(M, E), b \in \mathcal{PS}_H(M, E)\}$$

Now, let us have a closer look on the operators contained in this algebra. Let U be a foliated local chart of M, and $(x^1, \dots, x^n)$ be a coordinate system over U. The function x^i is a symbol of order 0, so that x_L^i, x_R^i may be viewed as elements of $\mathcal{L}(M)$. The conjugate coordinate ξ_i is a symbol of order 1 if $i = 1, \dots, \nu$, but of order 2 when $i = \nu + 1, \dots, n$. As before, this defines elements ξ_{iL}, ξ_{iR} of $\mathcal{L}(M)$. Now, observe that :

$$(x_L^i - x_R^i) = \mathbf{i}\partial_{\xi_i}, \quad (\xi_{iL} - \xi_{iR}) = -\mathbf{i}\partial_{x^i} \tag{3.6}$$

The same holds for the odd coordinates ψ^i and $\overline{\psi}_i$:

$$(\psi_L^i - \psi_R^i) = \partial_{\overline{\psi}_i}, \quad (\overline{\psi}_{iL} - \overline{\psi}_{iR}) = \partial_{\psi^i} \tag{3.7}$$

Hence, $\mathcal{L}(M)$ contains all the "elementary operations" on (Heisenberg) symbols.

Little calculations shows that a generic element $a_L b_R \in \mathcal{L}(M)$ reads over U as a series

$$a_L b_R = \sum_{|\alpha|=1}^{k} \sum_{|\beta|=1}^{\infty} \sum_{|\eta|=1}^{n} \sum_{|\theta|=1}^{n} (s_{\alpha,\beta,\eta,\theta})_L (\psi^\eta \overline{\psi}^\theta)_R \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tag{3.8}$$

where $s_{\alpha,\beta,\eta,\theta} \in \mathcal{S}_H(U, E)$ and $k \in \mathbb{N}$. It other words, this is a *differential operator on symbols*. It is not necessarily true that any series of that form comes from an element of $\mathcal{L}(M)$.

Now, consider the $\mathbb{Z}_2$-graded algebra $\mathcal{S}(M) = \mathcal{L}(M)[[\varepsilon]]$ of *formal power series* with coefficients $\mathcal{L}(M)$, and indeterminate ε, which comes with a trivial grading. $\mathcal{S}$ is filtered by the subalgebras $\mathcal{S}_k(M) = \mathcal{S}(M)\varepsilon^k$, for every $k \in \mathbb{N}$. This k counts the minimal power of ε appearing in an element of $\mathcal{S}(M)$. We now define an important subalgebra of $\mathcal{S}(M)$.

DEFINITION 3.8. The subspace $\mathcal{D}^m(M) \subset \mathcal{S}(M)$ consists of elements $s = \sum s_k \varepsilon^k$ such that in any foliated local chart $U \in M$, we have

$$s_k = \sum_{|\alpha|=1}^{k} \sum_{|\beta|=1}^{\infty} \sum_{|\eta|=1}^{n} \sum_{|\theta|=1}^{n} (s^m_{k,\alpha,\beta,\eta,\theta})_L (\psi^\eta \overline{\psi}^\theta)_R \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta$$

where $s^m_{k,\alpha,\beta,\eta,\theta} \in \mathcal{S}_H(U, E)$ has *Heisenberg order* $\leqslant m + (k + |\beta| - 3|\alpha|)/2$. We also denote $\mathcal{D}^m_k(M) = \mathcal{D}^m(M) \cap \mathcal{S}_k(M)$. We set

$$\mathcal{D}(M) = \bigcup_{m \in \mathbb{R}} \mathcal{D}^m(M)$$

REMARK 3.9. The notion of order given here only will not really serve for the final calculations, so the reader may skip this technical point. What really matters for us is that this calculus is *invariant under diffeomorphisms*. In particular, in the different definitions which will follow, leading terms are unaltered after coordinate changes, and remainders keep the same form.

The space $\mathcal{D}(M)$ is a bi-filtered subalgebra of $\mathcal{S}(M)$, that is $\mathcal{D}^m_k(M) \cdot \mathcal{D}^{m'}_{k'}(M) \subset \mathcal{D}^{m+m'}_{k+k'}(M)$, for $m, m' \in \mathbb{R}$ and $k, k' \in \mathbb{N}$ ([36], Lemma 3.1). Using symbols *with compact supports*, we define analogously the subalgebra $\mathcal{D}_c(M) \subset \mathcal{D}(M)$.

DEFINITION 3.10. A *generalized Laplacian* is an operator $\Delta \in \mathcal{D}^{1/2}_1$ of even parity, which can be written, in any local coordinate system over a foliated local chart $U \in M$:

$$\Delta = \mathbf{i}\varepsilon \partial_{x^i} \partial_{\xi_i} \bmod \mathcal{D}^0_1(U) \tag{3.9}$$

That such an operator exists is not obvious, cf. [36], Lemma 3.3. We will see some important examples in the section concerning generalized Dirac operators.

A generalized Laplacian Δ will be our first point of departure towards the construction of a *JLO formula on Heisenberg symbols*. In this type of formula, one needs to know how to deal with an exponential of such an operator in order to have a "heat kernel". This indeed defines an element of $\mathcal{S}(M)$:

$$\exp(t\Delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Delta^k, \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.10}$$

REMARK 3.11. The generalized Laplacian will play a role analogous to that of the symplectic form ω is the flat case of Chapter 2, whereas $\exp(\Delta)$ may be thought of as the symplectic volume form. In Chapter 2, the symplectic form was a central element of the algebra $\mathcal{S}^0_{H,c}(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^\bullet T^*\mathbb{R}^n$. This may be interpreted as the flatness of the situation : as we shall see later, the curvature terms leading to a characteristic class formula will come out from commutators with a generalized Laplacian.

This operator does not belong to $\mathcal{D}(M)$. We define a one parameter group of automorphisms $(\sigma_\Delta^t)_{t\in\mathbb{R}}$ of the algebra $\mathcal{S}(M)$ as follows :

$$\sigma_\Delta^t(s) = \exp(t\Delta)s\exp(t\Delta),\ \forall s \in \mathcal{D}(M) \tag{3.11}$$

LEMMA 3.12. *For every generalized Laplacian Δ, $(\sigma_\Delta^t)_{t\in\mathbb{R}}$ is actually a one parameter group of automorphisms of $\mathcal{D}(M)$. More precisely, one has, for every $m \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$:*

$$[\Delta, \mathcal{D}_k^m] \subset \mathcal{D}_{k+1}^m, \quad \sigma_\Delta^t(\mathcal{D}_k^m) \subset \mathcal{D}_k^m$$

PROPOSITION 3.13. *(Duhamel formula) Let $\Delta + s$ be a perturbation of a generalized Laplacian Δ, where $s \in \mathcal{D}_1^0(M)$. Then,*

$$\exp(\Delta + s) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Delta_k} \exp(t_0\Delta)s\exp(t_1\Delta)\dots s\exp(t_k\Delta)\,dt$$

where Δ_k is the standard k-simplex, and $dt = dt_1 \dots dt_k$. Equivalently,

$$\exp(\Delta + s) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Delta_k} \sigma_\Delta^{t_0}(s)\sigma_\Delta^{t_0+t_1}(s)\dots\sigma_\Delta^{t_0+\dots t_{k-1}}(s)\exp(\Delta)\,dt$$

DEFINITION 3.14. Let Δ be a generalized Laplacian. The *bimodule of trace class operators* is the subspace $\mathcal{T}(M) = \mathcal{D}_c(M)\exp(\Delta)$ of $\mathcal{S}(M)$.

REMARK 3.15. $\mathcal{T}(M)$ is a $\mathcal{D}(M)$-bimodule, and does not depend on the choice of the generalized Laplacian ([36], Proposition 3.6). However, this is not a subalgebra of $\mathcal{S}(M)$.

The terminology will be explained in the next section. Finally note that if $G \subset \mathrm{Diff}(M)$ is a group of foliated diffeomorphisms, the algebra $\mathcal{D}(M)$ and the bimodule $\mathcal{T}(M)$ carry natural G-actions by automorphisms.

4. Canonical trace on the bimodule $\mathcal{T}$

4.1. Construction of the trace. Let (M^n, V) be a foliated manifold of codimension h, and let ν denote the dimension of the leaves, so that $n = \nu + h$, and set $E = \Lambda^\bullet(T^*M \otimes \mathbb{C})$. The aim of this section is to construct a canonical trace on $\mathcal{T}(M)$ from the Connes-Moscovici residue of Theorem 21.

First, we work locally. Let $U \in M$ be a foliated local chart of M . Recall that $\mathcal{T}(U)$ is a bimodule over $\mathcal{D}(U)$. A trace on $\mathcal{T}(U)$ is in this sense a linear map $\mathcal{T}(U) \to \mathbb{C}$ vanishing on the subspace $[\mathcal{T}(U), \mathcal{D}(U)]$ of graded commutators. Choose a coordinate system (x, ξ) on T^*U adapted to the foliation, and let Δ be the "flat" (generalized) Laplacian

$$\Delta = \mathbf{i}\varepsilon\partial_{x^i}\partial_{\xi_i}$$

For every multi-indices α and β, we define a bracket operation

$$\langle\partial_x^\alpha\partial_p^\beta \exp\Delta\rangle = \partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta \exp\left(\frac{\mathbf{i}}{\varepsilon}(\xi_i - \zeta_i)(x^i - y^i)\right)\Big|_{x=y,\xi=\zeta} \tag{3.12}$$

Remark that this vanishes unless $|\alpha| = |\beta|$.

EXAMPLE 3.16. One has

$$\langle\exp\Delta\rangle = 1, \quad \langle\partial_{x^i}\exp\Delta\rangle = \langle\partial_{\xi_i}\exp\Delta\rangle = 0, \quad \langle\partial_{x^i}\partial_{\xi_j}\exp\Delta\rangle = \frac{\mathbf{i}}{\varepsilon}\delta_i^j$$

where δ_i^j denotes the Kronecker symbol. More generally, the formula with a polynomial $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta$ involves all the possible contractions between ∂_{x^i} and ∂_{ξ_j}. For example,

$$\langle \partial_{x^i} \partial_{x^j} \partial_{\xi_k} \partial_{\xi_l} \exp \Delta \rangle = \left(\frac{i}{\varepsilon}\right)^2 (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k)$$

We also define a contraction map for the odd variables : for every multi-indices η and θ, we set

$$\langle (\psi^\eta \overline{\psi}^\theta)_R \rangle = (-1)^n \mathrm{tr}_s(\psi^\eta \overline{\psi}^\theta) \tag{3.13}$$

In particular, from the normalization we chose for tr_s, we have $\langle (\psi^1 \ldots \psi^n \overline{\psi}_1 \ldots \overline{\psi}_n)_R \rangle = 1$

From this, we construct a linear map

$$\langle\langle\ .\ \rangle\rangle : \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{S}_H(U, E)[[\varepsilon]] \tag{3.14}$$

as follows. Let $s \exp(\Delta) \in \mathcal{T}(M)$ be a generic element, where $s = \sum_{k\geqslant 0} s_k \varepsilon^k \in \mathcal{D}^m(U)$. The symbol s_k may be written

$$s_k = \sum_{|\alpha|=1}^{k} \sum_{|\beta|=1}^{\infty} \sum_{|\eta|=1}^{n} \sum_{|\theta|=1}^{n} (s_{k,\alpha,\beta,\eta,\theta})_L (\psi^\eta \overline{\psi}^\theta)_R \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta$$

where $s_{k,\alpha,\beta,\eta,\theta} \in \mathcal{S}_H(U, E)$ has *Heisenberg order* $\leqslant m + (k + |\beta| - 3|\alpha|)/2$. Then, we set

$$\langle\langle s_k \exp \Delta \rangle\rangle = \sum_{|\alpha|=1}^{k} \sum_{|\beta|=1}^{\infty} \sum_{|\eta|=1}^{n} \sum_{|\theta|=1}^{n} s_{k,\alpha,\beta,\eta,\theta} \langle (\psi^\eta \overline{\psi}^\theta)_R \rangle \langle \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \exp \Delta \rangle$$

This sum is finite by definition of the even contraction, and is consequently a polynomial of degree at most k in the variable ε^{-1}. Then, $\langle\langle s_k \exp \Delta \rangle\rangle \varepsilon^k$ is a polynomial of degree at most k in ε. Then, we finally define

$$\langle\langle s \exp \Delta \rangle\rangle = \sum_{k\geqslant 0} \langle\langle s_k \exp \Delta \rangle\rangle \varepsilon^k \tag{3.15}$$

which is an element of $\mathcal{S}_H(U, E)[[\varepsilon]]$ (this is not totally obvious, refer to [36], Lemma 4.1).

We can now pass to the definition of the trace on $\mathcal{T}(M)$.

DEFINITION 3.17. Let $U \in M$ be a foliated local chart, and denote $\langle\langle s \exp \Delta \rangle\rangle[n]$ the coefficient of ε^n. Then, we define the following graded trace

$$\mathrm{Tr}_s^U : \mathcal{T}(U) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \mathrm{Tr}_s^U(s \exp \Delta) = ⨍ \mathrm{Tr}_s^U \langle\langle s \exp \Delta \rangle\rangle[n]$$

This map does not depend on the choice of foliated coordinates (x, ξ) on T^*U, and we may globalize the construction to M by means of partition of unity, giving a global canonical graded trace :

$$\mathrm{Tr}_s : \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathbb{C}$$

on the $\mathcal{D}(M)$-bimodule of trace class operators.

The proof that this is a trace is the same as that of [36], Lemma 4.2. That we can glue these quantities to get a global functional on the whole foliation M is Proposition 4.3 of the same paper. For the same reason, Tr_s is invariant under the action of any group G of foliated diffeomorphisms on $\mathcal{T}(M)$.

4.2. An algebraic Mehler formula. In this section, we show how the Todd genus can be recovered from the contractions we defined in the previous paragraph. The formula may be seen as a pseudodifferential analogue of the Mehler formula for the harmonic oscillator, and will be crucial for obtaining the index theorem. We keep the notations of the previous subsection and work in a foliated local chart U.

For a matrix R with coefficients in $\mathbb{C}[[\varepsilon]]$, which has no degree zero term in ε, we can define the following formal power series in $M_n(\mathbb{C}[[\varepsilon]])$ and in $\mathbb{C}[[\varepsilon]]$

$$\frac{R}{e^R - 1} = 1 - \frac{1}{2}R + \frac{1}{12}R^2 + \dots, \quad \mathrm{Td}(R) = \det\left(\frac{R}{e^R - 1}\right) \tag{3.16}$$

We call $\mathrm{Td}(R)$ the *Todd series* of R.

Now, consider the operator

$$s = \xi_L \cdot R \cdot \partial_\xi = \xi_{iL} \cdot R^i_j \cdot \partial_{\xi_j}$$

and the perturbation of the flat Laplacian $\Delta + s$., which is not a generalized Laplacian. However, by the Duhamel formula, Proposition 3.13, $\exp(\Delta + s)$ still defines an element of $\mathcal{T}(U)$.

PROPOSITION 3.18. *For every multi-indices α and β, we have*

$$\langle \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \exp(\Delta + s) \rangle = \mathrm{Td}(R) s(R, \xi)$$

where the polynomial symbol $s(R,\xi)$ in ξ is given by the following formula :

$$s(R,\xi) = \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \exp\left(\frac{\mathbf{i}}{\varepsilon} q \cdot R \cdot (x - y) + \frac{\mathbf{i}}{\varepsilon}(\xi - \zeta) \cdot \frac{R}{1 - e^{-R}} \cdot (x - y)\right)\Big|_{x=y,\xi=\zeta}$$

EXAMPLE 3.19. We give some particular cases of the formula which will be useful in the sequel. We have

$$\langle \exp(\Delta + \xi_L \cdot R \cdot \partial_\xi) \rangle = \mathrm{Td}(R)$$
$$\langle (\mathbf{i}\varepsilon \partial_x + \xi_L \cdot R)^\alpha \exp(\Delta + \xi_L \cdot R \cdot \partial_\xi) \rangle = 0$$

where α is any multi-index.

5. Dirac operators

5.1. Generalities. The algebra of differential forms $\Omega^\bullet(M)$ on M and the Lie algebra $\mathrm{Vect}(M)$ of vector fields may be seen as elements of the space $\mathcal{PS}^0_H(M, E)$ of polynomials Heisenberg symbols of degree 0 via the following maps :

$$\mu : dx_i \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^\bullet(M) \mapsto \psi^{i_1} \ldots \psi^{i_k} \in \mathcal{PS}^0_H(M, E),$$
$$\iota : \partial_{x^i} \in \mathrm{Vect}(M) \mapsto \iota(\partial_{x^i}) \in \mathcal{PS}^0_H(M, E)$$

DEFINITION 3.20. A *generalized Dirac operator* D is an element of $\mathcal{D}(M)$ which writes

$$D = i\varepsilon\nabla + \overline{\nabla} \in \mathcal{D}^1_1(M) + \mathcal{D}^{-1/2}_0(M)$$

where ∇ and $\overline{\nabla}$ are locally given by

$$\nabla = \psi^i_R \partial_{x^i} + s, \qquad \overline{\nabla} = \overline{\psi}_{iR} \partial_{\xi_i} + r$$

with remainders s and r of the form :

$$s = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} (s^k_{\alpha i}(x)\xi_k + s^k_{\alpha ij}(x)\psi^i \overline{\psi}_k + s_{\alpha i}(x))_L \psi^i_R \partial^\alpha_\xi, \qquad r = \sum_{|\alpha| \geqslant 2} (r^i_\alpha)_L \overline{\psi}_{iR} \partial^\alpha_\xi$$

the coefficients depending on x being smooth functions.

REMARK 3.21. If we just care about the leading terms at first, looking things locally and make the analogy $\psi^i \leftrightarrow dx^i$ and $\overline{\psi}_i \leftrightarrow d\xi_i$ with Chapter 2, a Dirac operator D is something like

$$D = \partial_{x^i} dx^i + \partial_{\xi_i} d\xi_i \underset{\text{Fourier}}{\sim} F = \xi_i dx^i + x^i d\xi_i$$

Both gives, for a symbol $a \in \mathcal{S}_H(\mathbb{R}^n)$, the identity $[D, a] = [F, a] = da$. In other words, the operator F used in Chapter 2 is a so sort flat Dirac operator. The additional remainder terms in the definition of the Dirac operator are exactly the kind of quantities which come out after performing coordinate changes. This allows to say that the notion of generalized Dirac operator is a globalized version of the operator F.

It can be shown that this definition does not depend on the choice of the foliated coordinates. The terminology lies in the following important proposition.

PROPOSITION 3.22. *Let* D *be a generalized Dirac operator. Then,* $-D^2$ *is a generalized Laplacian.*

REMARK 3.23. In Remark 3.11, we compared the role of the symplectic form ω from Chapter 2 and a generalized Laplacian. The proposition allows to take the square root of this analogy and confirms the remark made above.

The rest of the paragraph gives the two crucial examples of generalized Dirac operators.

5.2. De Rham-Dirac operator. The exterior differentiation d acting on $\Omega^\bullet$ defines an element of $\mathcal{PS}^1(M, E)$. Its right action on the bimodule of formal Heisenberg symbols $\mathcal{S}_H(M, E)$ gives an element of odd degree $d_R \in \mathcal{L}(M)$. Locally,

$$d_R = \mathbf{i}(\xi_i \psi^i)_R = \mathbf{i}\psi^i_R \xi_{iR} = -\psi^i_R \partial_{x^i} + \mathbf{i}\xi_{iL}\psi^i_R$$

We then have a generalized Dirac operator

$$D = -\mathbf{i}\varepsilon d_R + \overline{\nabla} \tag{3.17}$$

for any choice of $\overline{\nabla}$ as in Definition 3.20. Such generalized Dirac operators will be said of *de Rham-Dirac type*. An important fact is that this definition *does not depend of the coordinates*. The reason is the invariance of the de Rham differential under diffeomorphisms.

PROPOSITION 3.24. *Let* $D = -\mathbf{i}\varepsilon d_R + \overline{\nabla}$ *be a de Rham-Dirac operator. Locally, the associated generalized Laplacian is given by the following formula :*

$$-D^2 = \mathbf{i}\varepsilon\left(\partial_{x^i}\partial_{\xi_i} + \sum_{|\alpha|\geqslant 2}(a^i_\alpha)_L \partial_{x^i}\partial^\alpha_\xi\right) + \varepsilon\left(\xi_{iL}\partial_{\xi_i} + \sum_{|\alpha|\geqslant 2}(a^i_\alpha \xi_i)_L \partial^\alpha_\xi\right) + \varepsilon\left((\psi^i\overline{\psi}_i)_R + \sum_{|\alpha|\geqslant 1}(b^i_{\alpha j})_L(\psi^j\overline{\psi}_i)_R\partial^\alpha_\xi\right)$$

where the coefficients $a^i_\alpha, b^i_{\alpha j}$ *are smooth functions.*

The formula seems to be tough at first sight. Nevertheless, one should retain that in the final calculations, the sums over $|\alpha| \geqslant \ldots$ will be killed for reasons of order.

5.3. Dirac operator associated to affine connections. Let Γ be an affine connection without torsion on M, locally characterized by its Christoffel symbols Γ^k_{ij}. Then, we define a "covariant derivative" operator on $\mathcal{S}_H(M, E)$, given locally by :

$$\nabla^\Gamma_i = \partial_{x^i} + \Gamma^k_{ij}(x)\left(\xi_{kL}\partial_{\xi_j} + [\overline{\psi}_k\psi^j, \,.\,]\right)$$

This is not properly speaking a covariant derivative, since the coordinates x and ξ do not commute. However, the action of ∇_i^Γ on the generators $x, \xi, \psi, \overline{\psi}$ are what we expect from a covariant derivative :

$$\nabla_i^\Gamma(x^k) = \delta_i^k, \qquad \nabla_i^\Gamma(\xi_j) = \Gamma_{ij}^k \xi_k, \qquad \nabla_i^\Gamma(\psi^k) = \Gamma_{ij}^k \psi^j, \qquad \nabla_i^\Gamma(\overline{\psi}_j) = \Gamma_{ij}^k \overline{\psi}_k$$

A generalized Dirac operator $D = \mathbf{i}\varepsilon\nabla + \overline{\nabla}$ will be said *affiliated to the affine connection* Γ on M if we have

$$\nabla = \psi_R^i(\nabla_i^\Gamma + s) \tag{3.18}$$

where the remainder s writes

$$s = \psi_R^i \left(\sum_{|\alpha|\geqslant 2} (s_{\alpha i}^k \xi_k)_L \partial_\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|\geqslant 1} (s_{\alpha ij}^k \overline{\psi}_k \psi^j + s_{\alpha i})_L \partial_\xi^\alpha \right)$$

the coefficients being smooth functions on M. Again, it is important to be aware that the definition is *coordinate independent*. This comes from the fact that Christoffel symbols behave in a suitable way under coordinates change.

PROPOSITION 3.25. *For such a Dirac operator* D, *one has the following analogue of the Lichnerowicz formula (locally) :*

$$-D^2 = \mathbf{i}\varepsilon\left(\partial_{x^i}\partial_{\xi_i} + (\Gamma_{ij}^k)_L(\psi^i\overline{\psi}_k)_R\partial_{\xi_j} + u + v\right) + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}(\psi^i\psi^j)_R R_{lij}^k(\xi_{kL}\partial_{\xi_l} + (\overline{\psi}_k\psi^l)_L) + w\right)$$

where $R_{lij}^k = \partial_{x^i}\Gamma_{jl}^k - \partial_{x^j}\Gamma_{il}^k + \Gamma_{im}^k\Gamma_{jl}^m - \Gamma_{jm}^k\Gamma_{il}^m$ *are the components of the curvature tensor of* Γ, *and*

$$u = \sum_{|\alpha|\geqslant 2} \left((u_{\alpha i})_L\partial_{x^i} + (u_\alpha^k\xi_k)_L + (u_{\alpha i}^k)_L(\psi^i\overline{\psi}_k)_R + (u_\alpha)_L\right)\partial_\xi^\alpha$$

$$v = \sum_{|\alpha|\geqslant 1} (v_{\alpha i}^k\overline{\psi}_k\psi^i)_L\partial_\xi^\alpha$$

$$w = (\psi^i\psi^j)_R\left(\sum_{|\alpha|\geqslant 2}(w_{\alpha ij}^k\xi_k)_L\partial_\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|\geqslant 1}(w_{\alpha lij}^k\overline{\psi}_k\psi^l + w_{\alpha ij})_L\partial_\xi^\alpha\right)$$

where the coefficients are smooth functions on M.

As in the de Rham-Dirac case, the sums over $\alpha \geqslant \dots$ will be killed in the final calculations.

6. Equivariant cohomology

Let G be a discrete group acting by orientation-preserving diffeomorphisms on a smooth oriented manifold Σ. Following [37], we shall explain an alternative construction of Connes' characteristic map from the G-equivariant cohomology of Σ to the periodic cyclic cohomology of the crossed product algebra $C_c^\infty(\Sigma) \rtimes G$ which differs slightly from the original construction given by Connes in [6], but is particularly well-adapted to the proof of the equivariant index theorem.

6.1. Classifying spaces. We recall that the nerve of a discrete group G is the simplicial set $NG_\bullet$ with $NG_n = G^n$ for all $n \geqslant 0$. The face maps $\delta_i : NG_n \to NG_{n-1}$ and degeneracy maps

$\sigma_i : NG_n \to NG_{n+1}$ are given by

$$\begin{aligned} \delta_0(g_1,\dots,g_n) &= (g_2,\dots,g_n) \\ \delta_i(g_1,\dots,g_n) &= (g_1,\dots,g_i g_{i+1},\dots,g_n), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \delta_n(g_1,\dots,g_n) &= (g_1,\dots,g_{n-1}) \\ \sigma_i(g_1,\dots,g_n) &= (g_1,\dots,g_i,1,g_{i+1},\dots,g_n), \qquad 0 \leqslant i \leqslant n. \end{aligned}$$

Let $\Delta_n = \{(s_0,\dots,s_n) \in [0,1]^{n+1} \mid s_0+\ldots+s_n = 1\}$ be the standard n-simplex in $\mathbb{R}^{n+1}$, with $\delta^i : \Delta_n \to \Delta_{n+1}$, $(s_0,\dots,s_n) \mapsto (s_0,\dots,s_{i-1},0,s_i,\dots,s_n)$ the inclusion of the i-th face, and $\sigma^i : \Delta_n \to \Delta_{n-1}$, $(s_0,\dots,s_n) \mapsto (s_0,\dots,s_i+s_{i+1},\dots,s_n)$ the collapse of the i-th edge.

The classifying space of G is the geometric realization of the simplicial set $NG_\bullet$, defined as the quotient

$$BG = \bigcup_{n \geqslant 0} NG_n \times \Delta_n / \sim$$

where the equivalence relation $\sim$ identifies a point $(g,\delta^i s) \in NG_n \times \Delta_n$ (resp. $(g,\sigma^i s) \in NG_n \times \Delta_n$) with the point $(\delta_i g, s) \in NG_{n-1} \times \Delta_{n-1}$ (resp. $(\sigma_i g, s) \in NG_{n+1} \times \Delta_{n+1}$).

Let $\Omega(\Delta_n)$ denote the DG algebra of (complex) smooth differential forms over Δ_n which are extendable over the hyperplane $\{(s_0,\dots,s_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s_0+\ldots+s_n = 1\}$, and let $\Omega(NG \times \Delta_n)$ be the DG algebra of functions from the discrete space NG to $\Omega(\Delta_n)$. Then a differential form ω of degree k over BG is a collection of k-forms $\omega_n \in \Omega^k(NG_n \times \Delta_n)$ subject to the constraints

$$(\delta^i \times \mathrm{Id})^* \omega_n = (\mathrm{Id} \times \delta_i)^* \omega_{n-1}\,, \qquad (\sigma^i \times \mathrm{Id})^* \omega_n = (\mathrm{Id} \times \sigma_i)^* \omega_{n+1}\,,$$

for all $i = 0,\dots,n$ and $n \geqslant 0$. The cohomology of BG with complex coefficients, which is the cohomology of the complex $\Omega(BG)$ endowed with the exterior differential d_s, is known to be canonically isomorphic to the group cohomology of G with complex coefficients :

$$H^\bullet(BG) \simeq H^\bullet(G,\mathbb{C})\,.$$

The universal G-bundle over the nerve $NG_\bullet$ is the simplicial set $N\overline{G}_\bullet$ with $N\overline{G}_n = G^{n+1}$ for all n, and the face and degeneracy maps are

$$\begin{aligned} \delta_i(g_0,\dots,g_n) &= (g_0,\dots,\check{g}_i,\dots,g_n) \qquad 0 \leqslant i \leqslant n \\ \sigma_i(g_0,\dots,g_n) &= (g_1,\dots,g_i,g_i,\dots,g_n) \qquad 0 \leqslant i \leqslant n \end{aligned}$$

where the symbol $\check{}$ denotes omission. The projection

$$N\overline{G}_\bullet \longrightarrow NG_\bullet, \quad (g_0,\dots,g_n) \longmapsto (g_0 g_1^{-1}, g_1 g_2^{-1},\dots,g_{n-1}g_n^{-1})$$

is a simplicial map. Its fibers are in one to one correspondence with the orbits of the free right G-action

$$(g_0,\dots,g_n)\cdot g = (g_0 g,\dots,g_n g),$$

which is also a simplicial map for all $g \in G$.

The universal G*-bundle over* BG is defined as the geometric realization

$$EG = \bigcup_{n \geqslant 0} N\overline{G}_n \times \Delta_n / \sim$$

The DG algebra of differential forms $\Omega(EG)$ defined as above carries a natural action of G. By pullback, $\Omega(BG)$ is isomorphic to the DG subalgebra of $\Omega(EG)$ consisting of G-invariant differential forms. Hence $H^\bullet(BG)$ is also the cohomology of the complex of G-invariant differential forms on EG.

More generally let Σ be a smooth G-manifold. The product $EG \times \Sigma$, endowed with the diagonal G-action, is a G-bundle over the quotient manifold $EG \times_G \Sigma$. The DG algebra $\Omega(EG \times \Sigma)$, defined as the collection of differential forms over $N\overline{G}_n \times \Delta_n \times \Sigma$ with gluing constraints as above, inherits an action of G by pullback. The DG subalgebra of G-invariant differential forms is isomorphic to $\Omega(EG \times_G \Sigma)$. We define the G-equivariant cohomology of Σ (with complex coefficients) as the corresponding de Rham cohomology $H^\bullet(EG \times_G \Sigma)$.

The Chern-Weil theory of characteristic classes for vector bundles carries easily to the equivariant case. Let V be a G-equivariant (complex) vector bundle over Σ, and choose a connection ∇_0 on V. Of course ∇_0 is not G-invariant in general, and we denote by $\mathrm{Ad}_g(\nabla_0)$ its image under the adjoint action of an element $g \in G$. The set of all connections being an affine space, at any point $(g_0, \dots, g_n)(s_0, \dots, s_n) \in N\overline{G}_n \times \Delta_n$ we can build a new connection ∇ on V by means of the barycentric formula

$$\nabla(g_0, \dots, g_n)(s_0, \dots, s_n) = \sum_{i=0}^{n} s_i \,\mathrm{Ad}_{g_i}^{-1}(\nabla_0)\,. \tag{3.19}$$

Let $W = EG \times V$ be the pullback of the vector bundle V over the manifold $EG \times \Sigma$. If d_s denotes the exterior differential over EG, then $d_s + \nabla$ is a connection on W, whose curvature 2-form $R = [d_s, \nabla] + \nabla^2 \in \Omega^2(EG \times \Sigma, \mathrm{End}(W))$ reads

$$R(g_0, \dots, g_n)(s_0, \dots, s_n) = \sum_{i=0}^{n} ds_i \,\mathrm{Ad}_{g_i}^{-1}(\nabla_0) + \sum_{i,j} s_i s_j \,\mathrm{Ad}_{g_i}^{-1}(\nabla_0)\,\mathrm{Ad}_{g_j}^{-1}(\nabla_0)\,.$$

Observe that R is always the sum of a form of bidegree $(1, 1)$ and a form of bidegree $(0, 2)$ with respect to the product manifold $EG \times \Sigma$. Since R is G-equivariant by construction, any Ad-invariant polynomial in the curvature yields a closed G-invariant differential form on $EG \times \Sigma$. In particular the Chern character $\mathrm{ch}(V)$ and the Todd class $\mathrm{Td}(V)$ are represented by

$$\mathrm{ch}(\mathbf{i}R/2\pi) = \mathrm{tr}(\exp(\mathbf{i}R/2\pi))\,, \qquad \mathrm{Td}(\mathbf{i}R/2\pi) = \det\left(\frac{\mathbf{i}R/2\pi}{e^{\mathbf{i}R/2\pi} - 1}\right)\,, \tag{3.20}$$

and a classical homotopy argument shows that their respective cohomology classes in $H^\bullet(EG \times_G \Sigma)$ do not depend on the particular choice of connection ∇_0 on V.

6.2. Characteristic map. We now explain our construction of Connes' characteristic map from the G-equivariant cohomology of Σ to the periodic cyclic cohomology of $\mathcal{A} = C_c^\infty(\Sigma) \rtimes G$. The idea is to twist the universal tensor extension of the group ring $\mathbb{C}G$

$$0 \longrightarrow J\mathbb{C}G \longrightarrow T\mathbb{C}G \longrightarrow \mathbb{C}G \longrightarrow 0$$

by the DG algebra of smooth differential forms on $EG \times \Sigma$. Indeed G acts on both manifolds EG and Σ from the right, and the induced action on the graded-commutative algebra of differential forms $\Omega(EG \times \Sigma)$ commutes with the de Rham differential d.

Let $\Omega_p(EG \times \Sigma)$ be the subalgebra of differential forms $\alpha \in \Omega(EG \times \Sigma)$ which have compact Σ-support at any point of EG. The crossed product

$$\mathcal{G} = \Omega_p(EG \times \Sigma) \rtimes G \tag{3.21}$$

is naturally a (noncommutative) DG algebra, for the product

$$(\alpha \otimes U_{g_1})(\beta \otimes U_{g_2}) = \alpha \wedge U_g(\beta) \otimes U_{g_1 g_2}$$

and differential

$$d(\alpha \otimes U_g) = d\alpha \otimes U_g$$

for all $\alpha, \beta \in \Omega_p(EG \times \Sigma)$ and $g_i \in G$. An algebra extension of $\mathcal{G}$ is defined as the vector space

$$\mathcal{H} = \Omega_p(EG \times \Sigma) \otimes T\mathbb{C}G\,, \tag{3.22}$$

graded by the differential form degree ($T\mathbb{C}G$ is trivially graded), and endowed with the twisted product

$$(\alpha\otimes U_{g_1}\otimes\ldots\otimes U_{g_n})(\beta\otimes U_{g_{n+1}}\otimes\ldots\otimes U_{g_{n+m}})=\alpha\wedge U_{g_1\ldots g_n}(\beta)\otimes U_{g_1}\otimes\ldots\otimes U_{g_{n+m}}\ .$$

Also the de Rham differential is extended to $\mathcal{H}$ by $d(\alpha\otimes U_{g_1}\otimes\ldots\otimes U_{g_n})=d\alpha\otimes U_{g_1}\otimes\ldots\otimes U_{g_n}$. Clearly the obvious multiplication map $\mathcal{H}\to\mathcal{G}$, $\alpha\otimes U_{g_1}\otimes\ldots\otimes U_{g_n}\mapsto\alpha\otimes U_{g_1\ldots g_n}$ is a morphism of DG algebras, hence its kernel $\mathcal{I}=\Omega_p(EG\times\Sigma)\otimes J\mathbb{C}G$ is a two-sided DG ideal. We define a completion of $\mathcal{H}$ as

$$\widehat{\mathcal{H}}=\bigoplus_{k\geqslant 0}\varprojlim_n\left(\Omega_p^k(EG\times\Sigma)\otimes T\mathbb{C}G/(J\mathbb{C}G)^n\right)\ . \tag{3.23}$$

The product and differential on $\mathcal{H}$ extend in an obvious way to $\widehat{\mathcal{H}}$. If EG were a finite-dimensional manifold, the sum over the form degree k would be finite and $\widehat{\mathcal{H}}=\varprojlim_n\Omega_p(EG\times\Sigma)\otimes T\mathbb{C}G/(J\mathbb{C}G)^n$ would coincide with the $\mathcal{I}$-adic completion of $\mathcal{H}$. This does not hold in general and (3.23) is a strictly smaller algebra.

Now we view $C_c^\infty(\Sigma)\subset\Omega_p^0(EG\times\Sigma)$ as the subalgebra of scalar functions which are *constant* in the direction EG. This identification is G-equivariant, hence extends to a morphism of algebras $\rho:\mathcal{A}\to\mathcal{G}$. The universal property of the tensor algebra thus yields an homomorphism $\rho_*:T\mathcal{A}\to\mathcal{H}$ explicitly given by

$$\rho_*(f_1U_{g_1}\otimes f_2U_{g_2}\ldots\otimes f_kU_{g_k})=f_1U_{g_1}(f_2)\ldots U_{g_1\ldots g_{k-1}}(f_k)\otimes U_{g_1}\otimes U_{g_2}\otimes\ldots\otimes U_{g_k}$$

on any n-tensor, $f_i\in C_c^\infty(\Sigma)$, $g_i\in G$. Note that here, the real meaning of $f_iU_{g_i}$ in the r.h.s is $f_i\otimes U_{g_i}$, but we shall from now on use the shorthand notation as in this context it should be clear whether there are tensor products or not. One easily checks that ρ_* carries the ideal $(J\mathcal{A})^n$ to $\Omega_p^0(EG\times\Sigma)\otimes(J\mathbb{C}G)^n$ for all n, hence extends to an homomorphism of completed algebras

$$\rho_*\ :\ \widehat{T}\mathcal{A}\longrightarrow\widehat{\mathcal{H}}\ . \tag{3.24}$$

The next step is a slight generalization of the Cuntz-Quillen X-complex recalled in Section 1 to the DG algebra setting. Indeed the de Rham differential d on $\widehat{\mathcal{H}}$ extends in a unique way to the $\widehat{\mathcal{H}}$-bimodule of universal 1-forms $\Omega^1\widehat{\mathcal{H}}$ by

$$d(\hat h_0\mathbf{d}\hat h_1)=(d\hat h_0)\mathbf{d}\hat h_1+(-1)^{\deg(\hat h_0)+1}\hat h_0\mathbf{d}(d\hat h_1)\ ,\qquad\forall\ \hat h_0\mathbf{d}\hat h_1\in\Omega^1\widehat{\mathcal{H}}\ ,$$

Then d is a differential of odd degree on $\Omega^1\widehat{\mathcal{H}}$ endowed with its total grading, compatible with the bimodule structure, and commutes in the graded sense with the universal differential $\mathbf{d}$. We define the X-complex of the DG algebra $(\widehat{\mathcal{H}},d)$ as the $\mathbb{Z}_2$-graded supercomplex

$$X(\widehat{\mathcal{H}},d)\ :\ \widehat{\mathcal{H}}\rightleftarrows\Omega^1\widehat{\mathcal{H}}_\natural\ , \tag{3.25}$$

where $\Omega^1\widehat{\mathcal{H}}_\natural=\Omega^1\widehat{\mathcal{H}}/[\widehat{\mathcal{H}},\Omega^1\widehat{\mathcal{H}}]$ is the quotient of the bimodule of universal 1-forms by its subspace of graded commutators. The odd differential $\natural\mathbf{d}\oplus\overline{b}$ commutes in the graded sense with d. Then, the refinement is to use $(\natural\mathbf{d}\oplus\overline{b})+d$ as the total differential for $X(\widehat{\mathcal{H}},d)$, instead of $\natural\mathbf{d}\oplus\overline{b}$. The proof of the following lemma is a straightforward computation.

LEMMA 3.26. *Let $\rho_*:\widehat{T}\mathcal{A}\to\widehat{\mathcal{H}}$ be the canonical homomorphism. The linear map of even degree $\chi(\rho_*,d)$ from $\Omega\widehat{T}\mathcal{A}$ to $X(\widehat{\mathcal{H}},d)$ given by*

$$\chi(\rho_*,d)(\hat a_0\mathbf{d}\hat a_1\ldots\mathbf{d}\hat a_p)=$$
$$\frac{1}{(p+1)!}\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i(p-i)}d\rho_*(\hat a_{i+1})\ldots d\rho_*(\hat a_n)\,\rho_*(\hat a_0)\,d\rho_*(\hat a_1)\ldots d\rho_*(\hat a_i)$$
$$+\frac{1}{p!}\sum_{i=1}^{p}\natural\big(\rho_*(\hat a_0)\,d\rho_*(\hat a_1)\ldots\mathbf{d}\rho_*(\hat a_i)\ldots d\rho_*(\hat a_p)\big)$$

for all $\widehat{a}_i \in \widehat{T}\mathcal{A}$*, is a cocycle in the* Hom*-complex* $\mathrm{Hom}(\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathcal{A}, X(\widehat{\mathcal{H}}, d))$.

REMARK 3.27. As a matter of fact, this cocycle is constructed as a refinement of the algebra cochain theory of Quillen (compare Chapter 2, Section 3). One difference is that it has values in the X-complex of $\widehat{\mathcal{H}}$ and some modifications must occur. The idea is to work in the bar complex of $\widehat{T}\mathcal{A}$, using the superconnection

$$\nabla = \delta_{\mathrm{bar}} + (\natural \mathbf{d} \oplus \overline{b}) + d + \rho_*$$

If we denote K its curvature, we then look at the cochain

$$\partial\natural\, e^K = \int_0^1 e^{(1-t)K} \cdot \partial K \cdot e^{tK}\, dt\, \natural$$

where ∂ and $\natural$ are defined in Theorem 2.13. Notice that we did not evaluate this under a trace, contrary to was we did in Chapter 2, Section 3. For a general account on this construction, the reader may consult [**34**].

Note that a differential form $d\rho_*(\widehat{a}) \in \widehat{\mathcal{H}}$ has always degree 0 in the direction EG and degree 1 in the direction Σ, so that $\chi(\rho_*, d)$ vanishes on $\Omega^n\widehat{T}\mathcal{A}$ whenever $n > \dim\Sigma$ and thus extends to the direct product $\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathcal{A} = \prod_{n\geqslant 0}\Omega^n\widehat{T}\mathcal{A}$. This would not be the case if the image of $\mathcal{A}$ in $\mathcal{G}$ consisted in non-constant functions in the direction EG.

The last step associates a cocycle $\lambda'_\omega \in \mathrm{Hom}(X(\widehat{\mathcal{H}}, d), \mathbb{C})$ to any closed G-invariant differential form $\omega \in \Omega(EG\times\Sigma)$. To that purpose we define the X-complex *localized at units* as the vector space

$$X(\widehat{\mathcal{H}}, d)_{[EG\times\Sigma]} = \bigoplus_{k\geqslant 0} \varprojlim_n \left(\Omega_p^k(EG\times\Sigma)\otimes\Omega^n\mathbb{C}G_{[1]}\right), \tag{3.26}$$

where $\Omega^n\mathbb{C}G_{[1]}$ is the space of completed universal n-forms localized at the unit $1 \in G$:

$$U_{g_0} dU_{g_1}\dots dU_{g_n} \in \Omega^n\mathbb{C}G_{[1]} \Leftrightarrow g_0 g_1\dots g_n = 1\,,$$

$$dU_{g_1}\dots dU_{g_n} \in \Omega^n\mathbb{C}G_{[1]} \Leftrightarrow g_1\dots g_n = 1\,.$$

$X(\widehat{\mathcal{H}}, d)_{[EG\times\Sigma]}$ is a quotient of $X(\mathcal{H}, d)$.

We define a projection $c : \mathcal{H} \to \Omega_p(EG\times\Sigma)\otimes\Omega\mathbb{C}G_{[1]}$, whose construction is based on the *Fedosov product* (compare with the isomorphism of Theorem 3.3). First, $c : \mathcal{H} \to \Omega_p(EG\times\Sigma)\otimes\Omega^{\mathrm{even}}\mathbb{C}G_{[1]}$ is defined as

$$\begin{aligned} c(\alpha\otimes U_{g_0}\otimes(U_{g_1g_2} - U_{g_1}U_{g_2})\otimes\dots\otimes(U_{g_{2n-1}g_{2n}} - U_{g_{2n-1}}U_{g_{2n}})) \\ = (-1)^n n!\,\alpha\otimes U_{g_0} dU_{g_1} dU_{g_2}\dots dU_{g_{2n-1}} dU_{g_{2n}} \end{aligned}$$

if $g_0 g_1\dots g_n = 1$, and

$$\begin{aligned} c(\alpha\otimes(U_{g_1g_2} - U_{g_1}U_{g_2})\otimes\dots\otimes(U_{g_{2n-1}g_{2n}} - U_{g_{2n-1}}U_{g_{2n}})) \\ = (-1)^n n!\,\alpha\otimes dU_{g_1} dU_{g_2}\dots dU_{g_{2n-1}} dU_{g_{2n}} \end{aligned}$$

if $g_1\dots g_n = 1$, and c vanishes on all other tensors for which the localization condition fails. On the other hand, $c : \Omega^1\mathcal{H}_\natural \to \Omega_p(EG\times\Sigma)\otimes\Omega^{\mathrm{odd}}\mathbb{C}G_{[1]}$ is uniquely specified by the relations

$$\begin{aligned} c(\natural(\alpha\otimes U_{g_0}\otimes(U_{g_1g_2} - U_{g_1}U_{g_2})\otimes\dots\otimes(U_{g_{2n-1}g_{2n}} - U_{g_{2n-1}}U_{g_{2n}}))\mathbf{d}(\beta\otimes U_{g_{2n+1}})) \\ = (-1)^n n!\,\alpha\wedge U_{g_0\dots g_{2n}}(\beta)\otimes U_{g_0} dU_{g_1} dU_{g_2}\dots dU_{g_{2n-1}} dU_{g_{2n}} dU_{g_{2n+1}} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} c(\natural(\alpha\otimes(U_{g_1g_2} - U_{g_1}U_{g_2})\otimes\dots\otimes(U_{g_{2n-1}g_{2n}} - U_{g_{2n-1}}U_{g_{2n}}))\mathbf{d}(\beta\otimes U_{g_{2n+1}})) \\ = (-1)^n n!\,\alpha\wedge U_{g_1\dots g_{2n}}(\beta)\otimes dU_{g_1} dU_{g_2}\dots dU_{g_{2n-1}} dU_{g_{2n}} dU_{g_{2n+1}} \end{aligned}$$

The map c extends to a well-defined projection $X(\widehat{\mathcal{H}}, d) \to X(\widehat{\mathcal{H}}, d)_{[EG\times\Sigma]}$, and the boundary operators $\natural\mathbf{d}$, $\overline{b}$ and d descend to the quotient. Then for any G-invariant differential form $\omega \in \Omega(EG \times \Sigma)$ we define a cochain $\lambda_\omega \in \mathrm{Hom}(X(\widehat{\mathcal{H}}, d)_{[EG\times\Sigma]}, \mathbb{C})$ by

$$\lambda_\omega(\alpha \otimes U_{g_0} dU_{g_1} \dots dU_{g_n}) = \int_{\widetilde{\Delta}(g_1,\dots,g_n)\times\Sigma} \alpha \wedge \omega \tag{3.27}$$

where $\widetilde{\Delta}(g_1, \dots, g_n) \subset EG$ denotes the n-simplex with vertices $g_1 \dots g_n$, $g_2 \dots g_n$, ..., g_n, 1, and $\lambda_\omega(\alpha \otimes dU_{g_1} \dots dU_{g_n}) = 0$. Remark that the integral above is well-defined, because α has compact Σ-support at any point of EG. Also, by the definition of the completion $\widehat{\mathcal{H}}$, the degree k of the differential form α is fixed while n can be arbitrarily large. This causes no trouble since the r.h.s. of (3.27) vanishes for large n. A direct computation involving Stokes theorem yields

LEMMA 3.28. *The map sending any G-invariant differential form $\omega \in \Omega(EG \times \Sigma)$ to the cochain $\lambda'_\omega = \lambda_\omega \circ c \in \mathrm{Hom}(X(\widehat{\mathcal{H}}, d), \mathbb{C})$ is a morphism of complexes.*

Recall that according to the Cuntz-Quillen formalism, the Hom-complex $\mathrm{Hom}(\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathcal{A}, \mathbb{C})$ computes the periodic cyclic cohomology of $\mathcal{A}$. Collecting Lemmas 3.26 and 3.28 one thus gets

PROPOSITION 3.29. *Let G be a discrete group acting by orientation-preserving diffeomorphisms on a smooth oriented manifold Σ, and $\mathcal{A} = C_c^\infty(\Sigma) \rtimes G$. The map sending any G-invariant differential form $\omega \in \Omega(EG \times \Sigma)$ to the cochain $\lambda'_\omega \circ \chi(\rho_*, d) \in \mathrm{Hom}(\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathcal{A}, \mathbb{C})$ is a morphism of complexes. We denote by*

$$\Phi : H^\bullet(EG \times_G \Sigma) \longrightarrow HP^\bullet(\mathcal{A})$$

the corresponding map in cohomology.

7. Algebraic JLO formula

We now return to the original setting, in which we are given a foliation M of dimension $n = v + h$ and G a discrete group of foliated diffeomorphisms acting on the right of M. The Heisenberg cosphere bundle $S^*_H M$ will play the role of the manifold we noted Σ in the preceding section.

We first define some useful algebras. Let EG be the universal G-bundle over the classifying space BG. We take EG as the geometric realization of the simplicial set $N\overline{G}$ and consider the induced action of G on the DG algebra of smooth differential forms $(\Omega(EG), d_s)$. The crossed product

$$\mathcal{G} = \Omega(EG) \rtimes G \tag{3.28}$$

is a particular case of the DG algebra constructed in Section 6, where the manifold Σ is reduced to a point. Hence considering twisted tensor products with the tensor algebra of $\mathbb{C}G$, one gets the DG algebra extension of $\mathcal{G}$ and its completion :

$$\mathcal{H} = \Omega(EG) \otimes T\mathbb{C}G\,, \qquad \widehat{\mathcal{H}} = \bigoplus_{k\geqslant 0} \varprojlim_n \left(\Omega^k_p(EG) \otimes T\mathbb{C}G/(J\mathbb{C}G)^n\right). \tag{3.29}$$

Now, let $\mathcal{D}(M)$ be the G-algebra of operators on the space of formal symbols $\mathcal{S}_H(M)$ constructed in Section 3, and denote by $\mathcal{D}_c(M)$ its subalgebra of compactly supported operators. The space $\Omega(EG, \mathcal{D}(M))$ of smooth differential forms on EG with values in $\mathcal{D}(M)$ is a DG algebra, for the pointwise product of differential forms and de Rham differential d_s. We endow $\Omega(EG, \mathcal{D}(M))$ with the G-action which combines the actions of G on EG and $\mathcal{D}(M)$ respectively. The crossed product

$$\mathcal{U} = \Omega(EG, \mathcal{D}_c(M)) \rtimes G \tag{3.30}$$

is therefore a DG algebra, with differential $d_s(\alpha \otimes U_g) = d_s\alpha \otimes U_g$ for all $\alpha \in \Omega(EG, \mathcal{D}_c(M))$ and $g \in G$. Considering twisted tensor products with the tensor algebra of $\mathbb{C}G$, a DG algebra extension of $\mathcal{U}$ is defined as above :

$$\mathcal{V} = \Omega(EG, \mathcal{D}_c(M)) \otimes T\mathbb{C}G\ , \qquad \widehat{\mathcal{V}} = \bigoplus_{k\geqslant 0} \varprojlim_n \left(\Omega^k_p(EG, \mathcal{D}_c(M)) \otimes T\mathbb{C}G/(J\mathbb{C}G)^n\right) . \tag{3.31}$$

The next step is the construction of an homomorphism from the $J\mathcal{A}$-adic completion $\widehat{T}\mathcal{A}$ of the tensor algebra over $\mathcal{A} = C^\infty_c(S^*_H M) \rtimes G$, to $\widehat{\mathcal{V}}$. To this end, choose any linear splitting $C^\infty_c(S^*_H M) \to \mathcal{S}_H(M)$ of the leading symbol homomorphism $\mathcal{S}_H(M) \to C^\infty_c(S^*_H M)$. Since the trivial line bundle $M \times \mathbb{C}$ can be identified with the 0-degree part of the exterior bundle $E = \Lambda^\bullet T^*_{\mathbb{C}} M$, the space of scalar symbols $\mathcal{S}_H(M)$ is a direct summand in the space $\mathcal{S}_H(M,E)$. Hence composing the linear map $C^\infty_c(S^*_H M) \to \mathcal{S}_H(M,E)$ with the left representation of symbols $L : \mathcal{S}_H(M,E) \to \mathcal{D}(M)$ gives rise to a linear map $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{U}$. By the universal property of the tensor algebra, σ extends to an homomorphism of algebras

$$\sigma_* \ : \ \widehat{T}\mathcal{A} \longrightarrow \widehat{\mathcal{V}}\ . \tag{3.32}$$

Of course the latter depends on the choice of linear splitting, but if σ' is another splitting, the linear path $((1-t)\sigma + t\sigma')_{t\in[0,1]}$ defines a family of splittings with σ and σ' as basepoints. As periodic cyclic cohomology is homotopy invariant, the choice of the splitting is irrelevant.

We now discuss superconnections [40]. Remark that the algebra $\Omega(EG, \mathcal{D}(M))$ acts by multipliers on $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ and $\widehat{\mathcal{V}}$. Let $D_0 \in \mathcal{D}(M)$ be a generalized Dirac operator as defined in Section 5 and consider the smooth 0-form $D \in \Omega^0(EG, \mathcal{D}(M))$ over the classifying space, given by

$$D(g_0, \dots, g_m)(s_0, \dots, s_m) = \sum_{i=0}^{n} s_i \operatorname{Ad}^{-1}_{g_i}(D_0)$$

for all $(g_0, \dots, g_m) \in N\overline{G}_m$ and $(s_0, \dots, s_m) \in \Delta^m$. Since the action of an element $g \in G$ on EG carries $(g_0, \dots, g_m)$ to $(g_0 g, \dots, g_m g)$, the function D is G-invariant by construction. The superconnection

$$\mathbf{D} = \mathbf{i}\varepsilon d_s + D\ , \tag{3.33}$$

acting on $\widehat{\mathcal{V}}$ by graded commutators, is a graded derivation. Its curvature is the inhomogeneous differential form

$$\mathbf{D}^2 = \mathbf{i}\varepsilon d_s D + D^2 \ \in \Omega^0(EG, \mathcal{D}(M)) \oplus \Omega^1(EG, \mathcal{D}(M))$$

where

$$d_s D(g_0, \dots, g_m)(s_0, \dots, s_m) = \sum_{i=0}^{m} ds_i \operatorname{Ad}^{-1}_{g_i}(D_0).$$

Then, choose a positive H-elliptic symbol $q \in \mathcal{S}^1_H(M)$ of order one on M, for example the sub-laplacian of Example 19. Extend it to a H-elliptic symbol $\tilde{q} \in \mathcal{S}^1_H(M,E)$, requiring that the leading symbol of $\tilde{q}$ remains of scalar type, and look at this as a constant in the direction EG. Using the left representation of symbols $L : \mathcal{S}_H(M) \to \mathcal{D}(M)$, one thus gets an element $\tilde{q}_L \in \Omega^0(EG, \mathcal{D}(M))$ constant in the direction EG. Let κ be an "infinitesimal" odd parameter : $\kappa^2 = 0$. The new superconnection

$$\nabla = \mathbf{D} + \kappa \log \tilde{q}_L\ , \tag{3.34}$$

acting on the DG algebra $\widehat{\mathcal{V}}[\kappa] = \widehat{\mathcal{V}} \oplus \kappa \widehat{\mathcal{V}}$ by graded commutators, is a graded derivation. Its curvature is the inhomogeneous differential form

$$\nabla^2 = \mathbf{D}^2 + \kappa[\log \tilde{q}_L, \mathbf{D}] \ \in \Omega^0(EG, \mathcal{D}(M)[\kappa]) \oplus \Omega^1(EG, \mathcal{D}(M)[\kappa])\ .$$

We use the homomorphism σ_* and the superconnection ∇ to construct a cocycle $\chi^{\mathrm{Tr}_s}(\sigma_*, \nabla) \in \operatorname{Hom}(\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathcal{A}, X(\mathcal{H}[\kappa], d_s))$ by a JLO-type formula. We first extend the graded trace to a morphism of complexes

$$\mathrm{Tr}_s \ : \ X(\widehat{\mathcal{V}}, d_s) \longrightarrow X(\widehat{\mathcal{H}}, d_s)\ ,$$

Then, for every p-form $\widehat{a}_0\mathbf{d}\widehat{a}_1\dots\mathbf{d}\widehat{a}_p \in \Omega^p\widehat{T}\mathcal{A}$, set

$$\begin{aligned}(3.35)\qquad \chi^{\mathrm{Tr}_s}(\sigma_*,\nabla)(\widehat{a}_0\mathbf{d}\widehat{a}_1\dots\mathbf{d}\widehat{a}_p) = \\ \sum_{i=0}^{p}(-1)^{i(p-i)}\int_{\Delta_{p+1}} \mathrm{Tr}_s\big(e^{-t_{i+1}\nabla^2}[\nabla,\sigma_{i+1}]\dots e^{-t_{p+1}\nabla^2}\sigma_0\, e^{-t_0\nabla^2}[\nabla,\sigma_1]\dots e^{-t_i\nabla^2}\big)dt \\ +\sum_{i=1}^{p}\int_{\Delta_p}\mathrm{Tr}_s\big(\natural\sigma_0\, e^{-t_0\nabla^2}[\nabla,\sigma_1]\dots e^{-t_{i-1}\nabla^2}\mathbf{d}\sigma_i\, e^{-t_i\nabla^2}\dots[\nabla,\sigma_p]e^{-t_n\nabla^2}\big)dt\end{aligned}$$

where $\sigma_i = \sigma_*(\widehat{a}_i) \in \widehat{\mathcal{V}}$ for all i. Since $\kappa^2 = 0$ this expression is actually a polynomial of degree one with respect to κ.

REMARK 3.30. (Compare Chapter 2, Section 3 and Remark 3.27) This formula is obtained once more within the algebra cochain theory of Quillen : we use the bar complex of $\widehat{T}\mathcal{A}$, and obtain the JLO formula from the cochain $\mathrm{Tr}_s^\natural(\partial e^{\widetilde{K}})$, where $\widetilde{K}$ is the curvature of the superconnection $\widetilde{\nabla} = \delta_{\mathrm{bar}} + (\natural\mathbf{d}\oplus\overline{b}) + d + \nabla + \rho_*$.

Define

$$(3.36)\qquad \chi^{\mathrm{Tr}_s}(\sigma_*,\mathbf{D},\log\widetilde{q}_L) = \frac{\partial}{\partial\kappa}\chi^{\mathrm{Tr}_s}(\sigma_*,\mathbf{D}+\kappa\log\widetilde{q}_L)\ .$$

The latter is a cocycle in $\mathrm{Hom}(\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathcal{A}, X(\widehat{\mathcal{H}}, d_s))$. By a classical homotopy argument, its cohomology class does not depend on any choice regarding the linear map $\sigma : \mathcal{A}\to\mathcal{U}$, the superconnection $\mathbf{D}$, and the elliptic symbol $\widetilde{q}$. The following proposition identifies the composition of this canonical class with the class of the chain map $\lambda_1' \in \mathrm{Hom}(X(\widehat{\mathcal{H}}, d), \mathbb{C})$.

PROPOSITION 3.31. *Let $D_0 \in \mathcal{D}(M)$ be a de Rham-Dirac operator, $D \in \Omega^0(EG, \mathcal{D}(M))$ the associated G-invariant function on the universal bundle, and $\mathbf{D} = i\varepsilon d_s + D$ the corresponding superconnection. Then $\lambda_1'\circ\chi^{\mathrm{Tr}_s}(\sigma_*,\mathbf{D},\log\widetilde{q}_L)$ is the equivariant Radul cocycle over $\widehat{T}\mathcal{A}$.*

PROOF. We work in a local foliated chart. First, we must observe that D is still a de Rham - Dirac type operator, essentially because $d_R = \mathbf{i}p_i\psi^i$ is G-invariant. Thus, D is of the form

$$D = -\mathbf{i}\varepsilon d_R + \overline{\psi}_{iR}\left(\partial_{\xi_i} + \sum_{|\alpha|\geqslant 2}(r^i_\alpha)_L\partial^\alpha_\xi\right)$$

The r^i_α are scalar functions on $EG\times M$. With d the exterior differential on EG, one has

$$dD = \sum_{|\alpha|\geqslant 2}\overline{\psi}_{iR}(dr^i_\alpha)_L\partial^\alpha_\xi$$

Moreover, D^2 reads

$$\begin{aligned}(3.37)\qquad -D^2 = \Delta + \varepsilon(\xi_{iL}\partial_{\xi_i} + (\psi^i\overline{\psi}_i)_R) \\ +\varepsilon\left(\sum_{|\alpha|\geqslant 2}((a^i_\alpha)_L\partial_{x^i} + (a^i_\alpha\xi_i)_L)\partial^\alpha_\xi + \sum_{|\alpha|\geqslant 1}(b^i_{\alpha j})_L(\psi^j\overline{\psi}_i)_R\partial^\alpha_\xi\right)\end{aligned}$$

where $\Delta = \mathbf{i}\varepsilon\partial_{x^i}\partial_{\xi_i}$, and the coefficients in the sums over $|\alpha|\geqslant\dots$ are also scalar functions on $EG\times M$. Recall also that

$$\mathbf{D} = d + D,\qquad \mathbf{D}^2 = dD + D^2,\qquad \nabla = \mathbf{D}+\kappa\log\widetilde{q}_L,\qquad \nabla^2 = \mathbf{D}^2 + \kappa[\log\widetilde{q}_L,\mathbf{D}]$$

We know that dD is proportional to $\overline{\psi}_R$. The symbol q being constant in the direction EG, one has $d\log\widetilde{q}_L = 0$. Moreover $\log\widetilde{q}_L$ commutes with ξ_R, hence the commutator $[\log\widetilde{q}_L,\mathbf{D}]$ is also proportional to $\overline{\psi}_R$. Finally the elements $\sigma = \sigma_*(\widehat{a}) \in \Omega^0(EG, \mathcal{D}_c(M)) \otimes \widehat{T}\mathbb{C}G$ are constant in the direction EG, hence we have

$$[\nabla, \sigma] = [\overline{\psi}_{iR}(\partial_{\xi_i} + \ldots), \sigma] + \kappa[\log \widetilde{q}_L, \sigma]$$

Now observe that the graded trace Tr_s selects the term proportional to $(\psi^1\overline{\psi}_1 \ldots \psi^n\overline{\psi}_n)_R$. The generalized Laplacian D^2 already brings terms proportional to 1 or $(\psi\overline{\psi})_R$ in the right sector. Thus the terms proportional to $\overline{\psi}_R$ in dD, $[\log \widetilde{q}_L, \mathbf{D}]$ and $[\nabla, \sigma]$ break the balance between the ψ_R and the $\overline{\psi}_R$ and must give a zero contribution to the cocycle. Hence we can consider that

$$\nabla^2 \simeq D^2 , \qquad [\nabla, \sigma] \simeq \kappa[\log \widetilde{q}_L, \sigma] .$$

A first consequence, taking into account $\kappa^2 = 0$, is that the cocycle $\chi^{\mathrm{Tr}_s}(\sigma_*, \mathbf{D}, \log \widetilde{q}_L)$ should contain exactly one commutator $[\nabla, \sigma]$. Thus the only non-zero contributions to this cocycle are :

$$\begin{aligned}\chi^{\mathrm{Tr}_s}(\sigma_*, \mathbf{D}, \log \widetilde{q}_L)(\widehat{a}_0 \mathbf{d}\widehat{a}_1) = &\int_{\Delta_2} \mathrm{Tr}_s\left(e^{-t_1 D^2}[\log \widetilde{q}_L, \sigma_1]e^{-t_2 D^2}\sigma_0 e^{-t_0 D^2}\right) dt \\ &+ \int_{\Delta_2} \mathrm{Tr}_s\left(e^{-t_2 D^2}\sigma_0 e^{-t_1 D^2}[\log \widetilde{q}_L, \sigma_1]e^{-t_0 D^2}\right) dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi^{\mathrm{Tr}_s}(\sigma_*, \mathbf{D}, \log \widetilde{q}_L)(\widehat{a}_0 \mathbf{d}\widehat{a}_1 \mathbf{d}\widehat{a}_2) = &\int_{\Delta_2} \mathrm{Tr}_s\left(\natural\sigma_0 e^{-t_0 D^2}[\log \widetilde{q}_L, \sigma_1]e^{-t_1 D^2}\mathbf{d}\sigma_2 e^{-t_2 D^2}\right) dt \\ &+ \int_{\Delta_2} \mathrm{Tr}_s\left(\natural\sigma_0 e^{-t_0 D^2}\mathbf{d}\sigma_1 e^{-t_1 D^2}[\log \widetilde{q}_L, \sigma_2]e^{-t_2 D^2}\right) dt\end{aligned}$$

A second consequence is that the images of these quantities under the projection $c : X(\widehat{\mathcal{H}}, d) \to X(\widehat{\mathcal{H}}, d)_{[EG]}$ belong to the subspace $\Omega^0(EG) \otimes \widehat{\Omega}\mathbb{C}G_{[1]}$ of the localized X-complex, in other words they are scalar functions over EG. Thus, their evaluation on the cocycle λ_1 drops all the components in $\Omega^0(EG) \otimes \Omega^k\mathbb{C}G$ for $k \geqslant 1$, and the remaining components in $\Omega^0(EG) \otimes \Omega^0\mathbb{C}G$ are simply localized at the unit. In particular

$$\lambda_1' \circ \chi^{\mathrm{Tr}_s}(\sigma_*, \mathbf{D}, \log \widetilde{q}_L)(\widehat{a}_0 \mathbf{d}\widehat{a}_1 \mathbf{d}\widehat{a}_2) = 0$$

and $\lambda_1' \circ \mathrm{Tr}_s$ *behaves like a graded trace* in the only remaining term :

$$\begin{aligned}\lambda_1' \circ \chi^{\mathrm{Tr}_s}(\sigma_*, \mathbf{D}, \log \widetilde{q}_L)(\widehat{a}_0 \mathbf{d}\widehat{a}_1) = &\int_{\Delta_2} \mathrm{Tr}_s\left(e^{-t_1 D^2}[\log \widetilde{q}_L, \sigma_1]e^{-t_2 D^2}\sigma_0 e^{-t_0 D^2}\right)_{[1]} dt \\ &+ \int_{\Delta_2} \mathrm{Tr}_s\left(e^{-t_2 D^2}\sigma_0 e^{-t_1 D^2}[\log \widetilde{q}_L, \sigma_1]e^{-t_0 D^2}\right)_{[1]} dt \\ = &\int_0^1 \mathrm{Tr}_s\left(\natural\sigma_0 e^{-tD^2}[\log \widetilde{q}_L, \sigma_1]e^{-(1-t)D^2}\right)_{[1]} dt\end{aligned}$$

The integrand $\mathrm{Tr}_s(\natural\sigma_0 e^{-tD^2}[\log \widetilde{q}_L, \sigma_1]e^{-(1-t)D^2})_{[1]}$ does not depend on $t \in [0, 1]$. Indeed

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}_s\left(\natural\sigma_0 e^{-tD^2}[\log \widetilde{q}_L, \sigma_1]e^{-(1-t)D^2}\right)_{[1]} &= -\mathrm{Tr}_s\left(\natural\sigma_0 e^{-tD^2}[D^2, [\log \widetilde{q}_L, \sigma_1]]e^{-(1-t)D^2}\right)_{[1]} \\ &= \mathrm{Tr}_s\left(\natural[D, \sigma_0]e^{-tD^2}[D, [\log \widetilde{q}_L, \sigma_1]]e^{-(1-t)D^2}\right)_{[1]}\end{aligned}$$

The last equality comes from $[D^2, X] = D[D, X] + [D, X]D$ and the graded trace property. The above quantity vanishes, because the commutators with D only bring terms proportional to $\overline{\psi}_R$. Therefore, the integrand may be replaced by its value at $t = 0$, and we are left with

$$\lambda_1' \circ \chi^{\mathrm{Tr}_s}(\sigma_*, \mathbf{D}, \log \widetilde{q}_L)(\widehat{a}_0 \mathbf{d}\widehat{a}_1) = \mathrm{Tr}_s\left(\sigma_0[\log \widetilde{q}_L, \sigma_1]e^{-D^2}\right)_{[1]}$$

Seeing $-D^2$ as a perturbation of the flat Laplacian $\Delta + u$, and using a Duhamel expansion, one gets

$$\mathrm{Tr}_s\left(\sigma_0[\log\widetilde{q}_L,\sigma_1]e^{-D^2}\right) = \sum_{k\geqslant 0}\int_{\Delta_k}\mathrm{Tr}_s\left(\sigma_0[\log\widetilde{q}_L,\sigma_1]\sigma_\Delta^{t_0}(u)\ldots\sigma_\Delta^{t_0+\ldots+t_{k-1}}(u)\exp(\Delta)\right)dt$$

Then, we want to move the operators ∂_x and ∂_ξ to the right in each term of the sum above, and look at when we have an exact balance in their powers. Otherwise, it will vanish under the graded trace Tr_s by definition. A ∂_ξ can be absorbed with a ξ_L by commutation, and ∂_x may appear in $\sigma_\Delta^t(\xi_L) = \xi_L + t[\Delta,\xi_L]) = \xi_L + \mathbf{i}t\varepsilon\partial_x$. With this elements at hand, we conclude that the presence of the sums over $|\alpha|$ in (3.37) prevent an exact balance between ∂_x and ∂_ξ. So, we can neglect these parts in D^2 and get

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_s\left(\sigma_0[\log\widetilde{q}_L,\sigma_1]e^{-D^2}\right)_{[1]} &= \mathrm{Tr}_s\left(\sigma_0[\log\widetilde{q}_L,\sigma_1]\exp(\Delta+\varepsilon p_L\cdot\partial_p+\varepsilon(\psi^i\overline{\psi}_i)_R)\right)_{[1]}\\ &= \mathrm{Tr}_s\left(\sigma_0[\log\widetilde{q}_L,\sigma_1]\varepsilon^n(\psi^1\overline{\psi}_1\ldots\psi^n\overline{\psi}_n)_R\exp(\Delta+\varepsilon p_L\cdot\partial_p)\right)_{[1]}\\ &= ⨍(\sigma_0[\log\widetilde{q}_L,\sigma_1])_{[1]}\langle\langle\varepsilon^n(\psi^1\overline{\psi}_1\ldots\psi^n\overline{\psi}_n)_R\exp(\Delta+\varepsilon p_L\cdot\partial_p)\rangle\rangle[n]\\ &= ⨍(\sigma_0[\log\widetilde{q}_L,\sigma_1])_{[1]}\langle\exp(\Delta+\varepsilon p_L\cdot\partial_p)\rangle\end{aligned}$$

where in the second equality, we split the exponential. Using the result of Example 3.19, applied to the scalar matrix $R=\varepsilon$, we get

$$\mathrm{Tr}_s\left(\sigma_0[\log\widetilde{q}_L,\sigma_1]e^{-D^2}\right)_{[1]} = ⨍(\sigma_0[\log\widetilde{q}_L,\sigma_1])_{[1]}$$

which is the equivariant Radul cycocle of Proposition **??**. $\square$

Finally consider the diagonal action of G on the product $EG\times S_H^*M$, and its induced action on the space of differential forms $\Omega(EG\times S_H^*M)$ with total de Rham differential d. As in Section 6 we form the DG algebra

(3.38) $\quad \mathcal{X} = \Omega_p(EG\times S_H^*M)\rtimes G\,,$

and its DG extension

(3.39) $\quad \mathcal{Y} = \Omega_p(EG\times S_H^*M)\otimes T\mathbb{C}G\,, \qquad \widehat{\mathcal{Y}} = \bigoplus_{k\geqslant 0}\varprojlim_n\left(\Omega_p^k(EG\times S_H^*M)\otimes T\mathbb{C}G/(J\mathbb{C}G)^n\right).$

Viewing the algebra $C_c^\infty(S_H^*M)$ as constant functions over EG leads to the homomorphism $\rho:\mathcal{A}\to\mathcal{X}$ which extends to

(3.40) $\quad \rho_*\ :\ \widehat{T}\mathcal{A}\longrightarrow\widehat{\mathcal{Y}}\,.$

Let $\chi(\rho_*,d)\in\mathrm{Hom}(\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathcal{A},X(\widehat{\mathcal{Y}},d))$ be the cocycle of Lemma 3.26. The integration of differential forms along the fibers of the projection $EG\times S_H^*M\to EG$ immediately yields a morphism of complexes

(3.41) $\quad \displaystyle\int_{S_H^*M}\ :\ X(\widehat{\mathcal{Y}},d)\longrightarrow X(\widehat{\mathcal{H}},d)\,.$

PROPOSITION 3.32. *Let $D_0\in\mathcal{D}(M)$ be a Dirac operator affiliated to a Levi-Civita connection, $D\in\Omega^0(EG,\mathcal{D}(M))$ the associated G-invariant function on the universal bundle, and $\mathbf{D} = \mathbf{i}\varepsilon d_s + D$ the corresponding superconnection. Then one has the equality of cocycles in $\mathrm{Hom}(\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathcal{A},X(\widehat{\mathcal{H}},d))$:*

$$\chi^{\mathrm{Tr}_s}(\sigma_*,\mathbf{D},\log\widetilde{q}_L) = \int_{S_H^*M}\mathrm{Td}(\mathbf{i}R/2\pi)\wedge\chi(\rho_*,d)\,,$$

where R is the equivariant curvature 2-form of the affine connection.

PROOF. First, one important thing to note is that D remains a generalized Dirac operator affiliated to a connection. More precisely, in a foliated local chart, we have

$$D = \mathbf{i}\varepsilon\psi^i_R(\partial_{x^i} + {}^g\Gamma^k_{ij}(\xi_k\partial_{\xi_j} + (\overline{\psi}_j\psi^j)_R) + \overline{\psi}_{iR}\partial_{\xi_i} + r$$

where ${}^g\Gamma^k_{ij}$ is the function on EG given by

$${}^g\Gamma^k_{ij}(s_0,\dots,s_k)(g_0,\dots,g_k) = \sum_{l=0}^{k} s_l g_l^*\Gamma^k_{ij}$$

and r is a remainder of the form

$$r = \mathbf{i}\varepsilon\psi^i_R\left(\sum_{|\alpha|\geqslant 2}(s^k_{\alpha i}\xi_k)_L\partial^\alpha_\xi + \sum_{|\alpha|\geqslant 1}(s^k_{\alpha ij}\overline{\psi}_k\psi^j + s_{\alpha i})_L\partial^\alpha_\xi\right) + \overline{\psi}_{iR}\sum_{|\alpha|\geqslant 2}(r^i_\alpha)_L\partial^\alpha_\xi$$

the coefficients are differential forms on $EG \times M$.

Recall that ∇ is given by

$$\nabla = \mathbf{D} + \kappa\log\widetilde{q}_L = \mathbf{i}\varepsilon d_s + D + \kappa\log\widetilde{q}_L$$

and its square by

$$\nabla^2 = \mathbf{i}\varepsilon d_s D + D^2 + \kappa[\log\widetilde{q}_L, \mathbf{D}] = \mathbf{D}^2 + \kappa\delta\mathbf{D}$$

where δ denotes the commutator with $\log\widetilde{q_L}$. One important thing is that $-\mathbf{D}^2$ can be seen as a perturbation of the flat Laplacian $\Delta = \mathbf{i}\varepsilon\partial_{x^i}\partial_{\xi_i}$

$$\begin{aligned}-\mathbf{D}^2 = \Delta &+ ({}^g\Gamma^k_{ij})_L(\psi^i\overline{\psi}_k)_R\partial_{\xi_j}\\ &+ (-\mathbf{i}\varepsilon d_s({}^g\Gamma^l_{il})_L\psi^i_R + \frac{\varepsilon^2}{2}({}^g\Omega^k_{lij})_L(\psi^i\psi^j)_R)(\xi_k\partial_{\xi_l} + (\overline{\psi}_k\psi^l)_L) + \dots\end{aligned}$$

where the ${}^g\Omega^k_{lij}$ are the curvature tensors of the connection ${}^g\Gamma$. Note that the coefficient in front of ε^2 is the equivariant curvature 2-form

$$R^k_l = -\mathbf{i}\varepsilon d_s({}^g\Gamma^l_{il})_L\psi^i_R + \frac{\varepsilon^2}{2}({}^g\Omega^k_{lij})_L(\psi^i\psi^j)_R)$$

Moreover, the dots are made of terms of the same type, but involving powers of ∂_ξ strictly higher than those written.

We also have

$$[\nabla,\sigma] = \mathbf{i}\varepsilon\psi^i_R(\partial_{x^i} + ({}^g\Gamma^k_{ij}\xi_k)_L\partial_{\xi_j}\sigma + \dots) + \overline{\psi}_{iR}(\partial_{\xi_i}\sigma + \dots) + \kappa[\log\widetilde{q}_L,\sigma]$$

where the term proportional to $\varepsilon\psi$ is of order 0, with the dots of order -1, and the term proportional to $\overline{\psi}_{iR}$ is of order -1 when $1 \leqslant i \leqslant \nu$, of order -2 when $\nu+1 \leqslant i \leqslant n$, the dots here are of stricly smaller order.

We now study *the first sum* of the cocycle $\chi^{\mathrm{Tr}_s}(\sigma_*,\nabla)$.

Looking at $-\nabla^2 = \Delta + u$ as a perturbation of the flat Laplacian Δ, and performing a Duhamel expansion of the exponentials appearing leads to a study of terms of the form

$$\mathrm{Tr}_s\left(\sigma_0\sigma^{t_0}_\Delta(X_1)\dots\sigma^{t_0+\dots+t_{k-1}}_\Delta(X_k)\exp\Delta\right)$$

where $X_i = u$ or $[\nabla,\sigma_j]$. The action of σ_Δ does not modify the fact that X_i is of order 0, because

$$[\Delta, X_i] = \mathbf{i}\varepsilon(\partial_{x^j}X_i\cdot\partial_{\xi_j} + \partial_{\xi_j}X_i\cdot\partial_{x^j} + \partial_{x^j}\partial_{\xi^j}X_i)$$

Now, we observe that in the formulas above, $\varepsilon\psi_R$ is always proportional to an operator of order $\leqslant 0$, $\overline{\psi}_{iR}$ to an operator of order $\leqslant -1$ or -2 depending on i. The graded trace Tr_s selects the term proportional to $(\psi^1\overline{\psi}_1\dots\psi^n\overline{\psi}_n)_R$ which is therefore of order $\leqslant -(\nu+2h)$. This means that only the leading terms are involved in these quantities. In particular, the dots in the formulas above gives terms of order $< -(\nu+2h)$ and will vanish under Tr_s. For a similar reason, the derivatives $\partial_x X_i$ may be neglected in the calculations. In other words, *all functions of* x *can be considered as constants*. From the previous discussion, if we choose a coordinate system around an x_0 such that ${}^g\Gamma^k_{ij}(x_0) = 0$, we have

$$\mathbf{D} \simeq \mathbf{i}\varepsilon(d_s + \psi^i_R \partial_{x^i}) + \overline{\psi}_{iR}\partial_{\xi_i}$$
$$\mathbf{D}^2 \simeq \Delta + \frac{\varepsilon^2}{2} R^k_l (\xi_k \partial_{\xi_l} + (\overline{\psi}_k \psi^l)_L))$$

as we can ignore the x-derivatives of ${}^g\Gamma$. Actually, the term

$$\frac{\varepsilon^2}{2} R^k_l (\overline{\psi}_k \psi^l)_L) = \frac{\varepsilon^2}{2}(2d_s({}^g\Gamma^l_{il})_L \psi^i_R + ({}^g\Omega^k_{lij})_L(\psi^i\psi^j)_R))(\overline{\psi}_k\psi^l)_L)$$

can also be neglected, because it will act commutators on the σ_i. These terms are proportional to Π, and ${}^g\Omega^k_{lij}\overline{\psi}_k\psi^l\Pi ={}^g \Omega^k_{lij}\delta^k_l ={}^g \Omega^k_{kij} = 0$ since we use a Levi-Civita connection. Moreover, the relation $\Pi\psi^l = 0$ kills the other term, and we may consider that

$$\mathbf{D}^2 \simeq \Delta + \frac{\varepsilon^2}{2} R^k_l \xi_k \partial_{\xi_l}$$

Performing another Duhamel expansion on the $\exp(-t_i\nabla^2)$, and knowing that $\kappa^2 = 0$, the term

$$\int_{\Delta_{p+1}} \mathrm{Tr}_s\big(e^{-t_{i+1}\nabla^2}[\nabla, \sigma_{i+1}] \dots e^{-t_{p+1}\nabla^2}\sigma_0\, e^{-t_0\nabla^2}[\nabla,\sigma_1]\dots e^{-t_i\nabla^2}\big)dt$$

defining the JLO formula is the sum of the following terms :

$$\int_{\Delta_{p+1}} \mathrm{Tr}_s\big(e^{-t_{i+1}\mathbf{D}^2}[\nabla, \sigma_{i+1}] \dots e^{-t_{p+1}\mathbf{D}^2}\sigma_0\, e^{-t_0\mathbf{D}^2}[\nabla,\sigma_1]\dots e^{-t_i\mathbf{D}^2}\big)dt$$
$$\int_{\Delta_{p+2}} \mathrm{Tr}_s\big(e^{-t_{i+1}\mathbf{D}^2}\kappa\delta\mathbf{D}e^{-t_{i+2}\mathbf{D}^2}[\nabla, \sigma_{i+1}] \dots e^{-t_{p+2}\mathbf{D}^2}\sigma_0\, e^{-t_0\nabla^2}[\nabla,\sigma_1]\dots e^{-t_i\mathbf{D}^2}\big)dt$$
$$\int_{\Delta_{p+2}} \mathrm{Tr}_s\big(e^{-t_{i+1}\mathbf{D}^2}[\nabla, \sigma_{i+1}]e^{-t_{i+2}\mathbf{D}^2}\kappa\delta\mathbf{D}e^{-t_{i+3}\mathbf{D}^2} \dots e^{-t_{p+2}\mathbf{D}^2}\sigma_0\, e^{-t_0\nabla^2}[\nabla,\sigma_1]\dots e^{-t_i\mathbf{D}^2}\big)dt$$
$$\vdots$$

i.e, in the quantities $\int_{\Delta_{p+2}}\dots$ one of the $\exp(-t_i\nabla^2)$ is replaced by $e^{-t_i\mathbf{D}^2}\kappa\delta\mathbf{D}e^{-t_{i+1}\mathbf{D}^2}$, and the others by $\exp(-t_i\mathbf{D}^2)$. Note that the dimension of the simplex on which we integrate is risen by one when this replacement occurs. This also can be rewritten with the action of $\sigma_{-\mathbf{D}^2}$:

$$\int_{\Delta_{p+1}} \mathrm{Tr}_s\big(\sigma^{t_{i+1}}_{-\mathbf{D}^2}([\nabla,\sigma_{i+1}])\sigma^{t_{i+1}+t_{i+2}}_{-\mathbf{D}^2}([\nabla,\sigma_{i+2}])\dots\exp(-\mathbf{D}^2)\big)dt$$
$$\int_{\Delta_{p+2}} \mathrm{Tr}_s\big(\sigma^{t_{i+1}}_{-\mathbf{D}^2}(\kappa\delta\mathbf{D})\sigma^{t_{i+1}+t_{i+2}}_{-\mathbf{D}^2}([\nabla,\sigma_{i+1}])\dots\exp(-\mathbf{D}^2)\big)dt$$
$$\vdots$$

For $X = \kappa\delta\mathbf{D}, \sigma_0$ or a commutator $[\nabla,\sigma]$, we have

$$\sigma^t_{-\mathbf{D}^2}(X) = X + \sum_{k\geqslant 1}\frac{(-t)^k}{k!}\mathrm{ad}^k_{-\mathbf{D}^2}(X)$$

an so on. Then, recalling that we may retain only the leading terms for the calculations, we observe that :

$$-[\mathbf{D}^2, X] = \big[\Delta + R^k_l\xi_{kL}\partial_{\xi_l}, X\big] \simeq \partial_{\xi_i}X(\mathbf{i}\varepsilon\partial_{x^i} + R^k_i\xi_{kL})$$
$$[\mathbf{D}^2,[\mathbf{D}^2,X]] \simeq \partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}X(\mathbf{i}\varepsilon\partial_{x^i} + R^k_i\xi_{kL})(\mathbf{i}\varepsilon\partial_{x^j} + R^l_j\xi_{lL}) + R^j_i\partial_{\xi_i}X(\mathbf{i}\varepsilon\partial_{x^j} + R^l_j\xi_{lL})$$

and continuing the process by induction, we finally get

$$\sigma^t_{-\mathbf{D}^2}(X) \simeq X + \sum_{k\geqslant 1} \frac{t^k}{k!} \sum_{|\alpha|=1}^{k} P_\alpha(X)(\iota\varepsilon\partial_x + \xi_L \cdot R)^\alpha$$

where $P_\alpha(X)$ is a linear combination of the ξ-partial derivatives of X. The operators $(\iota\varepsilon\partial_x + \xi_L \cdot R)^\alpha$ may be moved to the right in front of $\exp(-\mathbf{D}^2)$ when $|\alpha| \geqslant 1$, because functions of x behave like constants. Then, using Example 3.19, we find that these quantities does not contribute for the calculations, in other words,

$$\sigma^t_{-\mathbf{D}^2}(X) \simeq X$$

As a consequence, we may drop the action of $\sigma_{-\mathbf{D}^2}$ in the above calculations and obtain

$$\begin{aligned}
&\int_{\Delta_{p+1}} \mathrm{Tr}_s\big(e^{-t_{i+1}\nabla^2}[\nabla,\sigma_{i+1}]\dots e^{-t_{p+1}\nabla^2}\sigma_0\, e^{-t_0\nabla^2}[\nabla,\sigma_1]\dots e^{-t_i\nabla^2}\big)\,dt \\
&= \frac{1}{(p+1)!}\mathrm{Tr}_s\big([\nabla,\sigma_{i+1}]\dots[\nabla,\sigma_p]\sigma_0[\nabla,\sigma_1]\dots[\nabla,\sigma_i]\exp(-\mathbf{D}^2)\big) \\
&\quad + \frac{1}{(p+2)!}\big[\mathrm{Tr}_s\big(\kappa\delta\mathbf{D}[\nabla,\sigma_{i+1}]\dots[\nabla,\sigma_p]\sigma_0[\nabla,\sigma_1]\dots[\nabla,\sigma_i]\exp(-\mathbf{D}^2)\big) \\
&\qquad + \mathrm{Tr}_s\big([\nabla,\sigma_{i+1}]\kappa\delta\mathbf{D}\dots[\nabla,\sigma_p]\sigma_0[\nabla,\sigma_1]\dots[\nabla,\sigma_i]\exp(-\mathbf{D}^2)\big) + \dots \\
&\qquad + \mathrm{Tr}_s\big([\nabla,\sigma_{i+1}]\dots[\nabla,\sigma_p]\sigma_0[\nabla,\sigma_1]\dots[\nabla,\sigma_i]\kappa\delta\mathbf{D}\exp(-\mathbf{D}^2)\big)\big]
\end{aligned}$$

the factors $\frac{1}{(p+1)!}$ or $\frac{1}{(p+2)!}$ comes from the volume of the standard simplex. We will now retain only the terms proportional to κ in the latter equality. Then, knowing that $\mathbf{D}^2$ may be replaced by $\Delta + \xi_L \cdot R$ using Example 3.19, and having in mind that the symbols σ_i are constant in the direction EG, we get

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\kappa}\int_{\Delta_{p+1}} \mathrm{Tr}_s\big(e^{-t_{i+1}\nabla^2}[\nabla,\sigma_{i+1}]\dots e^{-t_{p+1}\nabla^2}\sigma_0\, e^{-t_0\nabla^2}[\nabla,\sigma_1]\dots e^{-t_i\nabla^2}\big)\,dt \\
&= \frac{1}{(p+1)!}\int\!\!\!\!\!- \big(\langle\langle\delta\sigma_{i+1}[D,\sigma_{i+2}]\dots[D,\sigma_p]\sigma_0[D,\sigma_1]\dots[D,\sigma_i]\mathrm{Td}(R)\rangle\rangle[n] \\
&\qquad + \langle\langle[D,\sigma_{i+1}]\delta\sigma_{i+2}\dots[D,\sigma_p]\sigma_0[D,\sigma_1]\dots[D,\sigma_i]\mathrm{Td}(R)\rangle\rangle[n] + \dots \\
&\qquad + \langle\langle[D,\sigma_{i+1}]\dots[D,\sigma_p]\sigma_0[D,\sigma_1]\dots[D,\sigma_{i-1}]\delta\sigma_i\mathrm{Td}(R)\rangle\rangle[n]\big) \\
&\quad + \frac{1}{(p+2)!}\int\!\!\!\!\!- \big(\langle\langle\delta\mathbf{D}[D,\sigma_{i+1}]\dots[D,\sigma_p]\sigma_0[D,\sigma_1]\dots[D,\sigma_i]\mathrm{Td}(R)\rangle\rangle[n] \\
&\qquad - \langle\langle[D,\sigma_{i+1}]\delta\mathbf{D}\dots[D,\sigma_p]\sigma_0[D,\sigma_1]\dots[D,\sigma_i]\mathrm{Td}(R)\rangle\rangle[n] + \dots \\
&\qquad + (-1)^{p+2}\langle\langle[D,\sigma_{i+1}]\dots[D,\sigma_p]\sigma_0[D,\sigma_1]\dots[D,\sigma_i]\delta\mathbf{D}\mathrm{Td}(R)\rangle\rangle[n]\big)
\end{aligned}$$

Now, we may compare the calculations to those of Chapter 2, Section 4. The bracket selects only the operators proportional to $(\overline{\psi}_1\dots\overline{\psi}_n)_R$, which is of order $\leqslant -(\nu+2h)$. However, in the quantities proportional to $\frac{1}{(p+1)!}$, these operators gain an extra factor $\delta\sigma$, which is of order -1. So, the Connes-Moscovici residue kills this part. We can now make the identifications $\varepsilon\psi^i_R \leftrightarrow dx^i$ and $\overline{\psi}_{iR} \leftrightarrow d\xi_i - {}^g\Gamma^k_{ij}dx^j \simeq d\xi_i$, consistant with coordinate changes. Moreover, recall that the symbol of $\log\widetilde{q}(x,\xi)$ is of the form.

$$\log\widetilde{q}(x,\xi) = \log|\xi|' + q_0(x,\xi)$$

where q_0 is a Heisenberg symbol of order 0. Then, recalling that $\mathbf{D} \simeq \mathbf{i}\varepsilon(d_s + \psi^i_R \partial_{x^i}) + \overline{\psi}_{iR}\partial_{\xi_i}$, we have

$$\delta\mathbf{D} \simeq \left(\sum_{i=1}^{\nu} \frac{\xi_i^3}{|\xi|'^4}\overline{\psi}_{iR} + \frac{1}{2}\sum_{i=\nu+1}^{n} \frac{\xi_i}{|\xi|'^4}\overline{\psi}_{iR}\right) + (-\mathbf{i}\varepsilon\psi^i_R(\partial_{x^i} q_0)_L - \overline{\psi}_{iR}(\partial_{\xi_i} q_0)_L) + d_s \log \widetilde{q}_L$$
$$\leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{\nu} \frac{\xi_i^3}{|\xi|'^4} d\xi_i + \frac{1}{2}\sum_{i=\nu+1}^{n} \frac{\xi_i}{|\xi|'^4} d\xi_i\right) - dq_0$$

Note that $d_s \log \widetilde{q}_L = 0$ since it is constant in the direction EG. We then have the following equality

$$\frac{d}{d\kappa}\int_{\Delta_{n+1}} \mathrm{Tr}_s\big(e^{-t_{i+1}\nabla^2}[\nabla, \sigma_{i+1}]\dots e^{-t_{n+1}\nabla^2}\sigma_0\, e^{-t_0\nabla^2}[\nabla,\sigma_1]\dots e^{-t_i\nabla^2}\big)dt$$
$$= \frac{1}{(p+2)!}\int_{S^*_H M} \iota_L \cdot \big[\big(\delta\mathbf{D} d\sigma_{i+1}\dots d\sigma_p \sigma_0 d\sigma_1 \dots d\sigma_i - d\sigma_{i+1}\delta\mathbf{D} d\sigma_p\sigma_0 d\sigma_1\dots d\sigma_i + \dots$$
$$+ (-1)^{p+2} d\sigma_{i+1}\dots d\sigma_p\sigma_0 d\sigma_1\dots d\sigma_i \delta\mathbf{D}\big)\wedge \mathrm{Td}(R)\Pi\big]_{\mathrm{vol}}$$

where L is the generator of the Heisenberg dilations given locally by the formula

$$L = \left(\sum_{i=1}^{\nu} \xi_i\partial_{\xi_i} + \sum_{i=\nu+1}^{n} 2\xi_i\partial_{\xi_i}\right)$$

Actually, the terms containing dq_0 have order $< -(\nu+2h)$, and does not contribute to the Connes-Moscovici residue. Indeed, these terms bring n partial derivatives with respect to the variables $(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Using polar coordinates $(|\xi|', \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ to write the leading symbol of such a quantity , we see that it is proportional to $|\xi|^{-(\nu+2h)+1}$ times a partial derivative $\frac{\partial\sigma}{\partial|\xi|'}$, hence of order -2. We finally get

$$\frac{d}{d\kappa}\int_{\Delta_{p+1}} \mathrm{Tr}_s\big(e^{-t_{i+1}\nabla^2}[\nabla, \sigma_{i+1}]\dots e^{-t_{p+1}\nabla^2}\sigma_0\, e^{-t_0\nabla^2}[\nabla,\sigma_1]\dots e^{-t_i\nabla^2}\big)dt$$
$$= \frac{1}{(p+1)!}\int_{S^*_H M} d\sigma_{i+1}\dots d\sigma_p\cdot\sigma_0\cdot d\sigma_1\dots d\sigma_i$$

Doing exactly the same study for the second sum of the cocycle $\chi^{\mathrm{Tr}_s}(\sigma_*, \nabla)$ gives the final result. □

Collecting the previous results, one gets

THEOREM 3.33. *Let M be a foliated smooth manifold and G a discrete group acting on M by diffeomorphisms mapping leaves to leaves. Let $0 \to \Psi^{-1}_{H,c}(M) \rtimes G \to \Psi^0_{H,c}(M) \rtimes G \to C^\infty_c(S^*_H M) \rtimes G \to 0$ be the extension of equivariant Heisenberg pseudodifferential operators. Then the image of the canonical trace localized at unit $[\tau] \in HP^0(\Psi^{-1}_H(M) \rtimes G)$ under the excision map is*

$$\partial([\tau]) = \Phi(\pi^*\mathrm{Td}(TM\otimes\mathbb{C}))$$

where $\Phi : H^{\mathrm{ev}}(EG\times_G S^*_H M) \to HP^1(C^\infty_c(S^*_H M)\rtimes G)$ is Connes' characteristic map from equivariant cohomology to cyclic cohomology, and $\mathrm{Td}(TM\otimes\mathbb{C})$ is the equivariant Todd class of the complexified tangent bundle of M.

8. The transverse index theorem of Connes and Moscovici

We now apply the theorem obtained, together with the results of Chapter 1, Section 3 to the hypoelliptic signature operator Connes and Moscovici in [11].

Let (M, V) be a foliated manifold and $G \subset \mathrm{Diff}(M)$ a discrete group of orientation-preserving diffeomorphisms mapping leaves to leaves. We assume that G has *no fixed points* on M. Let $N =$

TM/V be the normal bundle of the sub-bundle V tangent to the leaves; both are equivariant G-bundles by construction. Assume that V and N are provided with G-invariant *triangular structures* (cf. Introduction, Section 2.3). Then the hermitean vector bundle

$$E = \Lambda^\bullet(V^* \otimes \mathbb{C}) \otimes \Lambda^\bullet(N^* \otimes \mathbb{C})$$

is G-equivariant, and the euclidean structures on V, N determine a G-invariant volume form on M via the canonical isomorphism of top-degree forms

$$\Lambda^{\max} V \otimes \Lambda^{\max} N \simeq \Lambda^{\max} M.$$

Let $H = L^2(M, E)$ be the Hilbert space of square-integrable sections of E with respect to the hermitean structure and volume form. The crossed-product algebra

$$\mathcal{A} = C_c^\infty(M) \rtimes G$$

is represented by bounded operators on H as follows: a function $f \in C_c^\infty(M)$ acts on the sections of E by pointwise multiplication, while $g \in G$ is represented by the unitary operator coming from the action of G on the manifold M and the vector bundles V, N. Denote by $d_V : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$ the leafwise de Rham differential. Choose an isomorphism of N with a vector sub-bundle of TM transverse to V, and denote by d_N the corresponding transverse de Rham differential. Then Connes and Moscovici consider the *hypoelliptic signature operator* acting on $C^\infty(M, E)$:

$$Q = (d_V d_V^* - d_V^* d_V) \pm (d_N + d_N^*),$$

where the sign $+1$ is taken on $\Lambda^{ev} N^*$ and -1 on $\Lambda^{odd} N^*$. This is a formally self-adjoint, hypoelliptic differential operator of Heisenberg order 4. Q is not quite invariant under the action of G because the isomorphism $TM \simeq V \oplus N$ requires a choice. However, in the Heisenberg pseudodifferential calculus associated to the foliation on M, the operator Q is H-elliptic and its leading symbol is exactly G-invariant. From this one builds a properly supported Heisenberg pseudodifferential operator

$$F = \frac{Q}{|Q|}$$

which is defined only up to addition of a smoothing operator. Again the Heisenberg leading symbol of F is G-invariant.

Now we turn to the problem of Connes and Moscovici recalled in the Introduction, where M is the bundle of Riemannian metrics over a smooth G-manifold W. Here the foliation on M corresponds to the fibration $M \to W$, and has a tautological triangular structure. The action of G by diffeomorphisms on W canonically lifts to an action on M mapping fibers to fibers, and preserving the triangular structure. In this situation, the results of [11] recalled in Introduction show (H, F) defines a p-summable Fredholm module over the algebra $\mathcal{A}$, for any $p > \dim V + 2\dim N$. Its Chern-Connes character may thus be computed by means of Proposition 1.17. We use the notations of Chapter 1, Section 3.

Let $\Psi_{H,c}(M, E)$ be the algebra of compactly supported Heisenberg pseudodifferential operators acting on the smooth sections of E, and define

$$\Psi^0 = \mathrm{Im}(\Psi^0_{H,c}(M, E) \rtimes G)\ , \qquad \Psi^{-1} = \mathrm{Im}(\Psi^{-1}_{H,c}(M, E) \rtimes G)\ ,$$

as the images of the representations of the crossed-product algebras as bounded operators on the Hilbert space H. Note that these representations are not faithful. Let $\pi : S^*_H M \to M$ be the projection from the Heisenberg cosphere bundle. The pullback $\pi^* E$ is naturally a G-equivariant vector bundle over $S^*_H M$. Since G has no fixed points by hypothesis, the leading symbol map $\Psi^0_{H,c}(M, E) \to C_c^\infty(S^*_H M, \mathrm{End}(\pi^* E))$ yields a canonical isomorphism of algebras

$$\Psi^0/\Psi^{-1} \simeq C_c^\infty(S^*_H M, \mathrm{End}(\pi^* E)) \rtimes G\ .$$

Under this identification the homomorphism $\rho_F : \mathcal{A} \to \Psi^0/\Psi^{-1}$ is given by

$$\rho_F(fU_g) = \pi^*(f) e U_g^E \qquad \forall\, f \in C_c^\infty(M)\ ,\ g \in G$$

where $e \in C^\infty(S^*_H M, \mathrm{End}(\pi^* E))$ is the leading symbol of the operator $P = \frac{1}{2}(1+F)$, and U^E_g is the represntation of g as a linear operator on the space of sections of π^*E. Since $P^2 = P$ and $U^E_g P = P U^E_g$ modulo operators of order -1, one has $e^2 = e$ and $eU^E_g = U^E_g e$ for all $g \in G$. Hence e is a G-invariant idempotent section of $\mathrm{End}(\pi^*E)$. Its range is the G-equivariant sub-bundle E_+ of π^*E consisting in the positive eigenvectors for the leading symbol of F. By usual Chern-Weil theory, the equivariant Chern character $\mathrm{ch}(E_+)$ is represented by a closed G-invariant differential form on the homotopy quotient $EG \times_G S^*_H M$. Taking its product with the equivariant Todd class of the complexified tangent bundle yields a class

$$L'(M) = \mathrm{Td}(TM \otimes \mathbb{C}) \cup \mathrm{ch}(E_+) \in H^{\mathrm{ev}}(EG \times_G S^*_H M)\ .$$

THEOREM 3.34. *Let G be a discrete group of orientation-preseving diffeomorphisms on a smooth oriented manifold W. Let M be the bundle of Riemannian metrics over W and $\mathcal{A} = C^\infty_c(M) \rtimes G$. If G has no fixed points, then the Chern-Connes character of the Fredholm module (H, F) associated to the hypoelliptic signature operator of Connes and Moscovici is*

$$\mathrm{ch}(H, F) = \pi_* \circ \Phi(L'(M)) \in HP^1(\mathcal{A})\ ,$$

where $\Phi : H^{\mathrm{ev}}(EG \times_G S^*_H M) \to HP^1(C^\infty_c(S^*_H M) \rtimes G)$ is Connes' characteristic map from equivariant cohomology to cyclic cohomology, and $\pi_* : HP^1(C^\infty_c(S^*_H M) \rtimes G) \to HP^1(\mathcal{A})$ is the map induced by the projection $\pi : S^*_H M \to M$.

PROOF. One has to compare the two extensions

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Psi^{-1}_{H,c}(M,E) \rtimes G \arrow[r] \arrow[d] & \Psi^{0}_{H,c}(M,E) \rtimes G \arrow[r] \arrow[d] & C^\infty_c(S^*_H M, \mathrm{End}(\pi^*E)) \rtimes G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Psi^{-1} \arrow[r] & \Psi^0 \arrow[r] & \Psi^0/\Psi^{-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

where the vertical arrows are the representations as bounded operators in the Hilbert space H. We consider two different cyclic cohomology classes on the ideals. The first one is the operator trace $[\mathrm{Tr}] \in HP^0(\Psi^{-1})$, and the second is the trace *localized at units* $[\tau] \in HP^0(\Psi^{-1}_{H,c}(M,E) \rtimes G)$. Of course $[\tau]$ is not the pullback of $[\mathrm{Tr}]$ under the representation.

We use a zeta function renormalization in order to compute the image $\partial([\mathrm{Tr}]) \in HP^1(\Psi^0/\Psi^{-1})$ of the operator trace under the excision map of the bottom extension, as in Section 3. Then, *since* G *has no fixed points*, only the part of the operator trace which is localized at units contributes to the residues. This means that one has the equality

$$\partial([\mathrm{Tr}]) = \partial([\tau])$$

in $HP^1(C^\infty_c(S^*_H M, \mathrm{End}(\pi^*E)) \rtimes G)$. A choice of local trivializations of the vector bundle E and a partition of unity allows to identify $C^\infty_c(S^*_H M, \mathrm{End}(\pi^*E)) \rtimes G$ with a subalgebra of the algebra of matrices $M_\infty(C^\infty_c(S^*_H M) \rtimes G)$. Under this identification Theorem 3.33 implies the equality

$$\partial([\mathrm{Tr}]) = \mathrm{tr} \,\#\, \Phi(\pi^* \mathrm{Td}(TM \otimes \mathbb{C}))$$

where tr denotes the trace of matrices and # the cup-product in cyclic cohomology. Finally, since the homomorphism ρ_F is multiplication by the G-invariant idempotent $e \in C^\infty(S^*_H M, \mathrm{End}(\pi^*E)) \subset M_\infty(C^\infty(S^*_H M))$, the composition $\rho_F \circ \partial([\mathrm{Tr}])$ is the above class twisted by the Chern character $\mathrm{ch}(E_+)$. $\square$

Chapitre 4

Discussion on manifolds with conical singularities

Studying index theory on manifolds with singularities is actually one of the motivations for studying a residue index formula adapted to cases where the zeta function exhibits multiple poles. It is indeed known for many years that zeta functions of differential operators on conic manifolds have double poles, see for example the paper of Lescure [28]. In the pseudodifferential case, even triple poles may occur, see [19].

We shall first recall briefly what we need from the theory of conic manifolds, i.e pseudodifferential calculus, residues and results on the associated zeta function. This review part essentially follows the presentation of [19].

1. Generalities on b-calculus and cone pseudodifferential operators

In our context, manifolds with conical singularities are just manifolds with boundary with an additional structure given by a suitable algebra of differential operators.

More precisely, let M be a compact manifold with (connected) boundary, and $r : M \to \mathbb{R}_+$ be a boundary defining function, i.e a smooth function vanishing on ∂M and such that its differential is non-zero on every point of ∂M. We work in a collar neighbourhood $[0,1)_r \times \partial M_x$ of the boundary, the subscripts are the notations for local coordinates.

DEFINITION 4.1. A *Fuchs type differential operator* P of order m is a differential operator on M which can be written in the form

$$P(r,x) = r^{-m} \sum_{j+|\alpha|\leqslant m} a_{j,\alpha}(r,x)(r\partial_r)^j \partial_x^\alpha$$

in the collar $[0,1)_r \times \partial M_x$. The space of such operators will be denoted $r^{-m}\mathrm{Diff}_b^m(M)$.

$\mathrm{Diff}_b^m(M)$ are the b-differential operators of Melrose's calculus for manifolds with boundary. We now recall the associated small b-pseudodifferential calculus $\Psi_b(M)$.

Let M_b^2 be the b-stretched product of M, e.g the manifold with corners whose local charts are given by the usual charts on $M^2 \setminus \partial M^2$, and parametrized by polar coordinates over ∂M in M^2. More precisely, writing $M \times M$ near $r = r' = 0$ as

$$M^2 \simeq [0,1]_r \times [0,1]_{r'} \times \partial M^2$$

this means that we parametrize the part $[0,1]_r \times [0,1]_{r'}$ in polar coordinates

$$r = \rho\cos\theta, \quad r' = \rho\sin\theta$$

for $\rho \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in [0,\pi/2]$. The right and left boundary faces are respectively the points where $\theta = 0$ and $\theta = \pi/2$.

Let Δ_b the b-diagonal of M_b^2, that is, the lift of the diagonal in M^2. Note that Δ_b is in fact diffeomorphic to M, so that any local chart on Δ_b can be considered as a local chart on M.

DEFINITION 4.2. The *algebra of* b*-pseudodifferential operators of order* m, denoted $\Psi_b^m(M)$, consists of operators $P : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ having a Schwartz kernel K_P such that

(i) Away from Δ_b, K_P is a smooth kernel, vanishing to infinite order on the right and left boundary faces.

(ii) On any local chart of M_b^2 intersecting Δ_b of the form $U_{r,x} \times \mathbb{R}^n$ such that $\Delta_b \simeq U \times \{0\}$, and where U is a local chart in the collar neighbourhood $[0,1)_r \times \partial M_x$ of ∂M, we have

$$K_P(r,x,r',x') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(\log(r/r')\cdot\tau + x\cdot\xi)} a(r,x,\tau,\xi)\, d\tau\, d\xi,$$

where $a(y,\nu)$, with $y=(r,x)$ and $\nu=(\tau,\xi)$, is a classical pseudodifferential symbol of order m, plus the condition that a is smooth in the neighbourhood of $r=0$.

Remark that $\log(r/r')$ should be singular at $r=r'=0$ if we would have considered kernels defined on M^2. Introducing the b-stretch product M_b^2 has the effect of blowing-up this singularity.

The *algebra of conic pseudodifferential operators* is then the algebra $r^{-\mathbb{Z}}\Psi_b^{\mathbb{Z}}(M)$. The opposed signs in the filtrations are only to emphasize that $r^{\infty}\Psi_b^{-\infty}(M)$ is the associated ideal of regularizing operators.

To such an operator $A = r^{-p}P \in r^{-p}\Psi_b^m$, we define on the chart U the local density

$$\omega(P)(r,x) = \left(\int_{|\nu|=1} p_{-n}(r,x,\tau,\xi)\iota_L d\tau d\xi\right)\cdot \frac{dr}{r}\, dx$$

where $\nu=(\tau,\xi)$ and L is the generator of the dilations.

It turns out (but this is not obvious) that this a priori local quantity does not depend on the choice of coordinates on M, and hence, define a globally defined density $\omega(P)$, smooth on M, that we call the *Wodzicki residue density*. Unfortunately, the integral on M of this density does not converge in general, as the boundary introduces a term in $1/r$ in the density. However, we can regularize this integral, thanks to the following lemma. Here, Ω_b denote the bundle of b-densities on M, that is, the trivial line bundle with local basis on the form $(dr/r)dx$. The following lemma from Gil and Loya is proved in [19].

LEMMA 4.3. *Let* $u \in r^{-p}C^{\infty}(M,\Omega_b)$, *and* $p\in\mathbb{R}$. *Then, the function*

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto \int_M r^z u$$

is holomorphic on the half plane $\mathrm{Re} z > p$, *and extends to a meromorphic function with only simple poles at* $z = p, p-1, \ldots$. *If* $p\in\mathbb{N}$, *Its residue at* $z=0$ *is given by*

$$\mathrm{Res}_{z=0} \int_M r^z u(r,x)\,\frac{dr}{r}\,dx = \frac{1}{p!}\int_{\partial M} \partial_r^p (r^p u(r,x))_{r=0}\, dx \tag{4.1}$$

Applying this regularization to the Wodzicki residue density is useful to many "residues traces" that we immediately study.

2. Traces on conic pseudodifferential operators

We first begin by defining different algebras of pseudodifferential operators, introduced by Melrose and Nistor in [29]. The main algebra that we shall consider is

$$A = r^{-\mathbb{Z}}\Psi^{\mathbb{Z}}(M) = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}}\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} r^{-p}\Psi^m(M)$$

which clearly contains the algebra of Fuchs type operators. The ideal of *regularizing operators* is

$$I = r^{\infty}\Psi^{-\infty}(M) = \bigcap_{p\in\mathbb{Z}}\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} r^{-p}\Psi^m(M)$$

and this explains why we note the two filtrations by opposite signs in A. Consider the following quotients

$$I_\sigma = r^\infty \Psi^{\mathbb{Z}}(M)/I, \quad I_\partial = r^{\mathbb{Z}}\Psi^{-\infty}(M)/I$$

Here, I_σ should be thought as an extension of the algebra of pseudodifferential operators in the interior of M, whereas I_∂ are regularizing operators up to the boundary. We finally define

$$A_\partial = \mathcal{A}/I_\sigma, \quad A_\sigma = A/I_\partial, \quad A_{\partial,\sigma} = A/(I_\partial + I_\sigma)$$

DEFINITION 4.4. Let $P \in r^{-p}\Psi^m(M)$ be a conic pseudodifferential operator, with $p, m \in \mathbb{Z}$. According to Lemma 4.3, define the functionals $\mathrm{Tr}_{\partial,\sigma}$, Tr_σ to be

$$\mathrm{Tr}_{\partial,\sigma}(P) = \mathrm{Res}_{z=0} \int_M r^z \omega(P)(r,x) \frac{dr}{r} dx = \frac{1}{p!} \int_{\partial M} \partial_r^p (r^p \omega(P)(r,x))_{r=0}\, dx \tag{4.2}$$

$$\mathrm{Tr}_\sigma(P) = \mathrm{Pf}_{z=0} \int_M r^z \omega(P) \frac{dr}{r} dx \tag{4.3}$$

where Pf denotes the constant term in the Laurent expansion of a meromorphic function.

REMARK 4.5. Using Lemma 4.3, one can show that $\mathrm{Tr}_{\partial,\sigma}(P)$ does not depend on the choice of the boundary defining function r. This is not the case for $\mathrm{Tr}_\sigma(P)$, but its dependence on r can be explicitly determined, cf. [19].

The "Partie Finie" regularization of a trace does not give in general a trace, and this is indeed the same for the functional $\mathrm{Tr}_\sigma(P)$ acting on these algebras, the obstruction to that is precisely the presence of the boundary. However, by definition, $\mathrm{Tr}_\sigma(P)$ clearly defines an extension of the Wodzicki residue for pseudodifferential operators, one can expect that it is a trace on $I_\sigma = r^\infty\Psi^{\mathbb{Z}}(M)/I$.

THEOREM 4.6. (Melrose-Nistor, [19, 29]) Tr_σ *is, up to a multiplicative constant, the unique trace on the algebra* I_σ

By Lemma 4.3 and the definition above, the defect of Tr_σ to be a trace is precisely measured by $\mathrm{Tr}_{\partial,\sigma}(P)$, which can therefore be viewed as a restriction of the Wodzicki residue to the boundary ∂M. Then, the following proposition seems natural.

THEOREM 4.7. (Melrose-Nistor, [19, 29]) $\mathrm{Tr}_{\partial,\sigma}$ *is, up to a multiplicative constant, the unique trace on the algebras* A_∂, A_σ *and* $A_{\partial,\sigma}$

These two traces may be seen as "local" terms, since they only depend on the symbol of the pseudodifferential operator considered. The first can be seen as a trace on interior of M, the second is related to the boundary ∂M. There is one last trace to introduce, less easy to deal with because this one is not local.

Fix a holomorphic family $Q(z) \in r^{\alpha z}\Psi_b^{\beta z}(M)$, with $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, such that Q is the identity at $z = 0$. Take $P \in r^{-p}\Psi_b^m$, with $p, m \in \mathbb{Z}$ and let $(PQ(z))_\Delta$ be the restriction to the diagonal Δ of M^2 of the Schwartz kernel of $PQ(z)$. Melrose and Nistor noticed in [29] that $(PQ(z))_\Delta$ is meromorphic in $\mathbb{C}$, with values in $r^{\alpha z - p}C^\infty(M)$ with possible simple poles in the set

$$\left\{ \frac{-n-m}{\beta}, \frac{-n-m+1}{\beta}, \dots \right\}$$

DEFINITION 4.8. Let $P \in r^{-p}\Psi_b^m$ be a conic pseudodifferential operator. Then, we define

$$\mathrm{Tr}_\partial(P) = \frac{1}{p!} \int_{\partial M} \partial_r^p (r^p \mathrm{Pf}_{z=0}(PQ(z))_\Delta)_{r=0}\, dx$$

If p is not an integer, then, $\mathrm{Tr}_\partial(P)$ is defined to be 0.

REMARK 4.9. $\mathrm{Tr}_\partial(P)$ depend on the choice of the operator Q, but the dependence can be explicitly determined, see [29].

There is an interpretation of Tr_∂ analogous to those of $\mathrm{Tr}_{\partial,\sigma}$: If the order of P is less than the dimension of M, then $\mathrm{Tr}_\partial(P)$ is a kind of L^2-trace of P restricted to the boundary. This is precisely the content of the following result.

THEOREM 4.10. (Melrose-Nistor, [19, 29]) $\mathrm{Tr}_\partial(P)$ *is, up to a multiplicative constant, the unique trace on the algebra*

$$I_\partial = r^{\mathbb{Z}}\Psi^{-\infty}(M)/I$$

3. Heat kernel expansion and zeta function

Now, let $\Delta \in r^{-2}\mathrm{Diff}^2_b(M)$ be *fully elliptic*, or *parameter elliptic* with respect to a parameter α. We refer to [19] for the definition, what we need to know is just that this condition ensures the existence of the heat kernel $e^{-t\Delta}$ of A, and that operators of the type $P\Delta^{-z}$, with $P \in r^{-p}\Psi^m_b$, are of trace-class on $r^{\alpha-m}L^2_b(M)$ for z in the half-plane $\mathrm{Re} z > \max\{\frac{m+n}{2}, \frac{p}{2}\}$, $n = \dim M$.

EXAMPLE 4.11. As usual, we work in a collar neighbourhood of M. Then, the operator

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\left((r\partial_r)^2 - \Delta_{\partial M} + \frac{(n-2)^2}{4} + a^2\right) \tag{4.4}$$

where $a > 1$, is and $\alpha = 1$, is an example of such an operator. See [19] for more details.

Then, the traces introduced in the previous paragraph gives the coefficients of the expansion of $\mathrm{Tr}(Pe^{-t\Delta})$.

THEOREM 4.12. (Gil-Loya, [19]) *Under the conditions above, we have*

$$\mathrm{Tr}(Pe^{-t\Delta}) \sim_{t\to 0} \sum_{k\geqslant 0} a_k t^{(k-p)/2} + (b_k + \beta_k \log t)t^k + (c_k + \gamma_k \log t + \delta_k(\log t)^2)t^{(k-m-n)/2}$$

where

$$\beta_k = C_k(\mathrm{Tr}_\sigma + \mathrm{Tr}_\partial)(P\Delta^k)$$
$$\gamma_k = C'_k\mathrm{Tr}_{\partial,\sigma}(P\Delta^{k-m-n})$$
$$\delta_k = C''_k\mathrm{Tr}_{\partial,\sigma}(P\Delta^{k-m-n})$$

C_k, C'_K, C''_k *are explicit (but not of interest for us).*

In particular, the coefficient of $\log t$ *is*

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}_\sigma(P) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_\partial(P) - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}_{\partial,\sigma}(P)$$

and the coefficient of $(\log t)^2$ *is*

$$-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}_{\partial,\sigma}(P)$$

Using a Mellin transform, we can write

$$\mathrm{Tr}(P\Delta^{-z/2}) = \frac{1}{\Gamma(z/2)}\int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{Tr}(Pe^{-t\Delta})\,dt$$

and knowing, that $z \mapsto \int_1^\infty t^{z-1}\mathrm{Tr}(Pe^{-t\Delta})\,dt$ is entire, the asymptotic expansion of the previous proposition gives the following corollary on the zeta function.

COROLLARY 4.13. *The zeta function* $z \mapsto \mathrm{Tr}(P\Delta^{-z/2})$ *is holomorphic in the half-plane* $\mathrm{Re}z > \max\{m+n, p\}$, *and extends to a meromorphic function with at most triple poles, whose set is discrete. At* $z = 0$, *there are simple and double poles only, which are respectively given by the terms of* $\log t$ *and* $(\log t)^2$ *in the heat kernel expansion of* $\mathrm{Tr}(Pe^{-t\Delta})$.

4. Spectral triple and regularity

In this paragraph, we want to investigate if Fuchs type operators on conic manifolds can define an abstract algebra of differential operators, so that the local index formula we gave in the first section applies.

We start with a conic manifold. Let M be a manifold with connected boundary, with boundary defining function r, endowed with the algebra of Fuchs type differential operators. The points (i), (ii), (iii) of Definition 1.1 are verified, if for example we take for Δ the fully-elliptic operator of order 2 given in Example 4.4, and require that the order is given by the differential order. More generally, working locally in a collar neighbourhood $[0,1)_r \times \partial M_x$ of the boundary ∂M, elementary calculations shows that

$$[r^p \mathrm{Diff}_b^m(M), r^{p'} \mathrm{Diff}_b^{m'}(M)] \subset r^{p+p'} \mathrm{Diff}_b^{m+m'-1}(M) \tag{4.5}$$

and as we shall see, the fact that the order in r does not decrease is the problem.

Let $r^p C^\infty(\partial M)$ denote the subalgebra of $C^\infty(M)$ of functions f which have an asymptotic expansion

$$f(r,x) \sim r^p f_p(x) + r^{p+1} f_{p+1}(x) + \dots$$

in a neighbourhood of $r = 0$. Here, the $\sim$ means that the rest of such an expansion is of the form $r^N f_N(r,x)$, with f_N bounded in the collar $[0,1) \times \partial M$. The case $p = 0$ actually corresponds to the smooth functions on the collar.

For the algebra of the spectral triple, it seems a good choice to look for a candidate among these classes of functions. But doing so, the formula of Lemma 1.11 is no more asymptotic in the sense of Definition 1.9. Indeed, if $b(r,x) = r^p$ for $p \in \mathbb{N}$, the observation (4.5) shows that the terms $b^{(k)}$ are in $r^{p-2k}\mathrm{Diff}_b^k(M)$, but by the properties of the zeta function given in the Corollary 4.13, the function

$$z \longmapsto \mathrm{Tr}(b^{(k)}\Delta^{-k-z})$$

is holomorphic for $\mathrm{Re}(z) + k > \max\left\{\frac{n+k}{2}, \frac{2k-p}{2}\right\}$, which is equivalent to $\mathrm{Re}(z) > \max\left\{\frac{n-k}{2}, -\frac{p}{2}\right\}$. Hence, if $p \geqslant 0$, the function above is in general not holomorphic at 0 when N goes to infinity. In other terms, the spectral triple we may construct will be not regular, and local index formulas of Connes-Moscovici, or those given at the beginning cannot be applied directly. As we have seen, the main problem is due to the fact that there are two notions of order : The differential order, which is local, and "the order in r", which is not, and comes form the presence of the boundary ∂M.

However, we may recover some interesting informations on M from the zeta function. Note for instance that the higher residue $⨍^2$ defined in Proposition 1.12 gives the trace $\mathrm{Tr}_{\partial,\sigma}$. $⨍^1$ is, modulo some constant terms, the sum of the three functionals $\mathrm{Tr}_{\partial,\sigma}$, Tr_σ, Tr_∂, which illustrates that it is no more a trace on the algebra of conic pseudodifferential operators. The next paragraph is a discussion on index theory.

5. A non-local index formula

The formula of Theorem 1.13 cannot be applied directly since we are not in the context of regular spectral triples. However, there are always some relevant informations to get on index theory.

Let M be a manifold with boundary, seen as a conic manifold, and consider the extension

$$0 \longrightarrow r^\infty \Psi_b^{-\infty}(M) \longrightarrow r^{-\mathbb{Z}}\Psi_b^{\mathbb{Z}}(M) \longrightarrow r^{-\mathbb{Z}}\Psi_b^{\mathbb{Z}}(M)/r^\infty\Psi_b^{-\infty}(M) \longrightarrow 0$$

Here, by an *elliptic pseudodifferential operator* $P \in r^{-\mathbb{Z}}\Psi_b^{\mathbb{Z}}(M)$, we shall mean that P is invertible in the quotient $A = r^{-\mathbb{Z}}\Psi_b^{\mathbb{Z}}(M)/r^{\infty}\Psi_b^{-\infty}(M)$. Being *fully elliptic* is an extra condition on the indicial or normal operator, which guarantees that P is Fredholm between suitable spaces. We shall not enter into these details : What we want to investigate is just the pairing given in the paragraph (13). In particular, if P is fully elliptic, then the pairing really calculates a Fredholm index.

Now, let $P, Q \in r^{-\mathbb{Z}}\Psi_b^{\mathbb{Z}}(M)$. We can still follow the "Partie Finie" argument given in the proof of Theorem 1.13, so that we still have the Radul cocycle

$$c(P,Q) = \mathrm{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}([P,Q]\Delta^{-z})$$
$$\mathrm{Res}_{z=0}\mathrm{Tr}\left(P\cdot\left(\frac{Q-\Delta^{-z}Q\Delta^{z}}{z}\right)\Delta^{-z}\right)$$

As we already said, the Connes-Moscovici's formula in Lemma 1.11 is no more asymptotic, but from an algebraic viewpoint, the (1.1) still holds. So, for any integer N, which will be thought large enough, we have

$$Q-\Delta^{-z}Q\Delta^{z} = \sum_{k=1}^{N} Q^{(k)}\Delta^{-k} + \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int \lambda^{-z}(\lambda-\Delta)^{-1}Q^{(N+1)}(\lambda-\Delta)^{-N-1}\,d\lambda$$

We now take advantage of the fact that the traces Tr_σ and $\mathrm{Tr}_{\partial,\sigma}$ vanishes when the differential order of the operators is less that the dimension of M. We then have the following result.

THEOREM 4.14. *Let M be a conic manifold, i.e a manifold with boundary endowed with a conic metric, and let r be a boundary defining function. Let Δ be the "conic laplacian" of Example 4.11. Then, the Radul cocycle associated to the pseudodifferential extension*

$$0 \longrightarrow r^{\infty}\Psi_b^{-\infty}(M) \longrightarrow r^{-\mathbb{Z}}\Psi_b^{\mathbb{Z}}(M) \longrightarrow r^{-\mathbb{Z}}\Psi_b^{\mathbb{Z}}(M)/r^{\infty}\Psi_b^{-\infty}(M) \longrightarrow 0$$

is given by the following non-local *formula :*

$$\begin{aligned} c(a_0,a_1) = {} & (\mathrm{Tr}_{\partial,\sigma}+\mathrm{Tr}_\sigma)(a_0[\log\Delta,a_1]) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_{\partial,\sigma}(a_0[\log\Delta,[\log\Delta,a_1]])+ \\ & + \mathrm{Tr}_\partial\left(a_0\sum_{k=1}^{N} a_1^{(k)}\Delta^{-k}\right) + \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\mathrm{Tr}\left(\int \lambda^{-z}a_0(\lambda-\Delta)^{-1}a_1^{(N+1)}(\lambda-\Delta)^{-N-1}\right)d\lambda \end{aligned}$$

for $a_0, a_1 \in \Psi_b^{\mathbb{Z}}(M)/r^{\infty}\Psi_b^{-\infty}(M)$ and N large enough.

In the right hand-side, the first line consists in local terms only depending on the symbol of P, the second line gives the non-local contributions.

If $P \in r^{-\mathbb{Z}}\Psi_b^{\mathbb{Z}}(M)$ is an elliptic operator, so that P defines an element in the odd K-theory group $K_1^{\mathrm{alg}}(A)$, and Q an inverse of P modulo A, we then obtain a formula for the index of P. The second line of the formula above should be a part of the eta invariant (when it is defined). A perspective may be to investigate how to compare these different elements in order to get another definition of the eta invariant, suitable not only for Dirac operators but also for general pseudodifferential operators.

Bibliographie

[1] M. F. Atiyah. Global theory of elliptic operators. In *Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics (Tokyo)*, Clay Math. Proc., pages 21–30. University of Tokyo Press, Tokyo, 1970.

[2] M. F. Atiyah and I. Singer. The index of elliptic operators on compact manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 :322–433, 1963.

[3] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne. *Heat kernels and Dirac operators*. Grundlehren Text Editions. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Corrected reprint of the 1992 original.

[4] Raoul Bott. On characteristic classes in the framework of Gelfand-Fuks cohomology. In *"Analyse et Topologie" en l'Honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974)*, pages 113–139. Astérisque, No. 32–33. Soc. Math. France, Paris, 1976.

[5] L. G. Brown, R. G Douglas, and P. A. Fillmore. Extensions of C^*-algebras and K-homology. *Ann. of Math.*, 105(3) :265–324, 1977.

[6] A. Connes. Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation. *Pitman Res. Notes in Math., Geometric methods in operator algebras (Kyoto)*, 123 :52–144, 1983.

[7] A. Connes. Noncommutative differential geometry. *Publ. Math. IHES*, 62 :257–360, 1985.

[8] A. Connes. On the spectral characterization of manifolds. *J. Noncommut. Geom.*, 7(1) :1–82, 2013.

[9] A. Connes, M. Gromov, and H. Moscovici. Group cohomology with Lipschitz control and higher signatures. *GAFA*, 3(1) :1–78, 1993.

[10] A. Connes and H. Moscovici. Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups. *Topology*, 29(3) :345–388, 1990.

[11] A. Connes and H. Moscovici. The local index formula in noncommutative geometry. *GAFA*, 5(2) :174–243, 1995.

[12] A. Connes and H. Moscovici. Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem. *Comm. Math. Phys.*, 198(1) :199–246, 1998.

[13] J. Cuntz and D. Quillen. Cyclic homology and nonsingularity. *Journal of the AMS*, 8 :373–442, 1995.

[14] J. Cuntz and D. Quillen. Excision in bivariant periodic cyclic cohomology. *Invent. Math*, 127 :67–98, 1997.

[15] J. Cuntz, G. Skandalis, and B. Tsygan. *Cyclic homology in non-commutative geometry*, volume 121 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, II.

[16] T. Fack. Index theorems and noncommutative topology. In *Geometric and topological methods for quantum field theory*, volume 668 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 183–229. Springer, Berlin, 2005.

[17] B. V. Fedosov. A direct proof of the formula for the index of an elliptic operator in euclidean space. *Funkcional. Anal. i Prilozhen. (Russian)*, 4 :83–84, 1970.

[18] I. M. Gel′fand. On elliptic equations. *Russian Math. Surveys*, 15(3) :113–123, 1960.

[19] J.B. Gil and P.A. Loya. On the noncommutative residue and the heat trace expansion on conic manifolds. *Manuscripta Math.*, 109(3) :309–327, 2002.

[20] P. B. Gilkey. *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, second edition, 1995.

[21] N. Higson. Meromorphic continuation of zeta functions associated to elliptic operators. In *Operators Algebras, Quantization and Noncommutative Geometry*, volume 365 of *Contemp. Math.*, pages 129–142. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[22] N. Higson. The residue index theorem of Connes and Moscovici. In *Surveys in Noncommutative Geometry*, volume 6 of *Clay Math. Proc.*, pages 71–126. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[23] N. Higson and J. Roe. *Analytic* K*-Homology*. Oxford University Press, 2000.

[24] Michel Hilsum and Georges Skandalis. Morphismes K-orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov (d'après une conjecture d'A. Connes). *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 20(3) :325–390, 1987.

[25] F. Hirzebruch. The signature theorem : reminescences and recreation. In *Prospects in mathematics*, pages 3–31. Ann. of Math. Studies. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971.

[26] A. Jaffe, A. Lesniewski, and K. Osterwalder. Quantum K-theory : I. the Chern character. *Comm. Math. Phys*, 118 :1–14, 1988.

[27] G. G. Kasparov. The operator K-functor and extensions of C^*-algebras. *Math. USSR Izv.*, 16 :513 ?572, 1981.

[28] J.M. Lescure. Triplets spectraux pour les variétés à singularité conique isolée. *Bull. Soc. Math. France*, 129(4) :593–623, 2001.

[29] R. Melrose and V. Nistor. Homology of pseudodifferential operators - I. Manifolds with boundary. *preprint*.

[30] J. Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math.*, 64 :399–405, 1956.

[31] S. Minakshisundaram and A. Pleijel. Some properties of the eigenfunctions of the laplace-operator on riemannian manifolds. *Canadian Journal of Mathematics*, 1 :242–256, 1949.

[32] S. Moroianu and V. Nistor. Index and homology of pseudodifferential operators on manifolds with boundary. In *Perspectives in Operator Algebras and Mathmatical Physics*, volume 8 of *Theta Ser. Adv. Math.*, pages 123–148. 2008.

[33] V. Nistor. Higher index theorems and the boundary map in cyclic cohomology. *Doc. Math.*, 2 :263–295 (electronic), 1997.

[34] D. Perrot. A bivariant chern character for families of spectral triples. *Comm. Math. Phys*, 231(1) :45–95, 2002.

[35] D. Perrot. Extensions and renormalized traces. *Math. Annalen*, 352 :911–940, 2012.

[36] D. Perrot. Pseudodifferential extension and Todd class. *Adv. in Math.*, 246 :265–302, 2013.

[37] D. Perrot. Local index theory for certain fourier integral operators on lie groupoids. *preprint arXiv :1401.0225*, 2014.

[38] D. Perrot and R. Rodsphon. An equivariant index theorem for hypoelliptic operators. *in preparation.*, 2014.

[39] R. Ponge. A new short proof of the local index formula and some of its applications. *Comm. Math. Phys*, 241(2-3) :215–234, 2003.

[40] D. Quillen. Algebra cochains and cyclic cohomology. *Publ. Math. IHES*, 68 :139–174, 1988.

[41] O.A. Radul. Lie algebras of differential operators, their central extensions and W-algebras. *Funct. Anal. Appl.*, 25 :25–39, 1991.

[42] R. Rodsphon. Zeta functions, excision in cyclic cohomology and index problems. *preprint arXiv :1309.2536*, 2013.

[43] A. Savin and B. Sternin. Elliptic theory for operators associated with diffeomorphisms of smooth manifolds. In *Pseudodifferential operators, generalized functions and asymptotics*, volume 231 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 1–26. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013.

[44] T. Schick. The Topology of Positive Scalar Curvature. In *to appear in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Seoul*, 2014.

[45] O. Uuye. Pseudodifferential operators and regularity of spectral triples. In *Perspectives on Noncommutative Geometry*, volume 61 of *Fields Institute Communications*, pages 153–163. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[46] M. Wodzicki. Noncommutative residue. I. Fundamentals. In K-*theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986)*, volume 1289 of *Lecture Notes in Math.*, pages 320–399. Springer, Berlin, 1987.

[47] G. Yu. Higher index theory of elliptic operators and geometry of groups. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid*, volume 2, pages 1623–1639. 2006.

Extensions, cyclic cohomology and index theory

Summary :
The index theorem of Atiyah and Singer, discovered in 1963, is a striking result which relates many different fields in mathematics going from the analysis of partial differential equations to differential topology and geometry. To be more precise, this theorem relates the dimension of the space of some elliptic partial differential equations and topological invariants coming from (co)homology theories, and has important applications. Many major results from different fields (algebraic topology, differential topology, functional analysis) may be seen as corollaries of this result, or obtained from techniques developed in the framework of index theory. On another side, zeta functions associated to pseudodifferential operators on a closed Riemannian manifold contain in their analytic properties many interesting informations. For instance, the Weyl theorem on the asymptotic number of eigenvalues of a Laplacian may be recovered within the residues of the zeta function. This gives in particular the volume of the manifold, which is a geometric data. Using the framework of noncommutative geometry developed by Connes, this idea may be pushed further, yielding index theorems in the spirit of the one of Atiyah-Singer. The interest in this viewpoint is to be suitable for more delicate geometrical situations. The present thesis establishes results in this direction.

The first chapter of the thesis aims at obtaining a general local index formula for "abstract elliptic operators". These formulas are derived from a cyclic cocycle expressed in terms of zeta functions residues, constructed by combining zeta functions renormalization techniques together with the excision property in cyclic cohomology. The formula also applies when the zeta function has multiple poles. We then relate this cocycle to the Chern-Connes character.

Chapters 2 and 3 establish index theorems for hypoelliptic operators in the Heisenberg calculus on foliations. We first get a result for these operators on $\mathbb{R}^n$. The idea is to retract the cocycle obtained in Chapter 1 to a cocycle depending only on the principal symbol of the operators. We give two ways of constructing this : one uses once more excision, the other one relies on the algebra cochains theory of Quillen. In the following, we extend this result to the more general situation of a discrete group acting on a foliation by foliated diffeomorphisms, in a joint work with D. Perrot. As a corollary, we give a new solution to a problem given by Connes and Moscovici, raising the question of computing the Chern character of the transverse fundamental class on a foliation.

The last chapter discusses some results on manifolds with conic singularities, and illustrates the results of Chapter 1 in the case where the zeta function exhibits double poles. Nevertheless, it should be noted that the index formula is no more local due to the singular situation considered. This phenomena is analogous to the apparition of the eta invariant in the case of Dirac operators, but may be developed for more general pseudodifferential operators.

KEYWORDS. Noncommutative geometry, index theory, foliations, conical manifolds, K-theory, cyclic (co)homology, hypoelliptic operators.

EXTENSIONS, COHOMOLOGIE CYCLIQUE ET THÉORIE DE L'INDICE

Résumé : Le théorème de l'indice d'Atiyah et Singer, démontré en 1963, est un résultat qui a permis de relier des thématiques mathématiques variées, allant des équations aux dérivées partielles à la topologie et la géométrie différentielle. Plus précisément, il fait le lien entre la dimension de l'espace des solutions d'une équation aux dérivées partielles elliptique et des invariants topologiques du type (co)homologie, et a des applications importantes, regroupant plusieurs théorèmes majeurs venant de divers domaines (géométrie algébrique, topologie différentielle, analyse fonctionnelle). D'un autre côté, les fonctions zêta associées à des opérateurs pseudodifférentiels sur une variété riemannienne close contiennent dans leurs propriétés analytiques des informations intéressantes. On peut par exemple retrouver dans les résidus le théorème de Weyl sur l'asymptotique du nombre de valeurs propres d'un laplacien, et en particulier le volume de la variété. En se plaçant dans le cadre de la géométrie différentielle non commutative développée par Connes, on peut pousser cette idée plus loin. Plus précisément, on peut obtenir, en combinant des techniques de renormalisation zêta avec la propriété d'excision en cohomologie cyclique, des théorèmes d'indice dans l'esprit de celui d'Atiyah-Singer. L'intérêt de ce point de vue réside dans sa généralisation possible à des situations géométriques plus délicates. La présente thèse établit des résultats dans cette direction.

Le premier chapitre de la thèse comporte des résultats sur des formules locales d'indice générales concernant des "opérateurs elliptiques abstraits". Ces formules viennent d'un certain cocycle cyclique exprimé en termes de résidus de fonctions zêta, et se construit en combinant la propriété d'excision en cohomologie cyclique avec une renormalisation zêta. Ce cocycle est naturellement relié au caractère de Chern-Connes, et est relativement bien adapté aux cas où la fonction zêta a des pôles multiples.

Les chapitres deux et trois établissent des théorèmes d'indice sur un feuilletage pour des opérateurs hypoelliptiques dans le calcul de Heisenberg. On obtient tout d'abord un premier résultat sur $\mathbb{R}^n$ pour cette classe d'opérateurs. L'idée est de rétracter (dans le (B, b)-complexe) le cocycle obtenu au premier chapitre sur un cocycle ne dépendant que du symbole principal. Deux constructions sont proposées : l'une utilise une nouvelle fois l'excision, tandis que l'autre s'appuie sur des méthodes dues à Quillen. On étend ensuite ce résultat, dans un travail en collaboration avec D. Perrot, à la situation plus générale d'un groupe discret agissant par difféomorphismes feuilletés sur un feuilletage. En corollaire, on obtient une solution à un problème posé par Connes et Moscovici, portant sur le calcul du caractère de Chern de la classe fondamentale transverse d'un feuilletage.

Le dernier chapitre comporte des résultats sur les variétés à singularité conique, et fournit un exemple d'application des formules du premier chapitre au cas où la fonction zêta comporte des pôles doubles. La formule d'indice n'est cependant pas locale à cause de la situation singulière considérée. Ce phénomène est analogue à l'apparition de l'invariant êta dans le cas d'opérateurs de type Dirac, mais peut dans notre cas se développer pour d'opérateurs pseudodifférentiels plus généraux.

MOTS-CLÉS. Géométrie non commutative, théorie de l'indice, feuilletages, variétés singulières coniques, K-théorie, (co)homologie cyclique, opérateurs hypoelliptiques

Image en couverture : Feuilletage d'Anosov. Crédit image : Université de Tokyo.

ED 512

INFOMATHS

Ecole doctorale

UNIVERSITÉ DE LYON